Онлайн-аукционы

Сергей Николенко

Теория экономических механизмов — ИТМО, весна 2008

Outline

Что бы нам ещё такое доказать

- Мы вот уже построили аукцион, у которого константная оптимальность относительно $F^{(2)}$.
- Теперь осталось ещё понять, какие бывают константы.
- То есть хотелось бы доказать нижнюю оценку на возможную оптимальность.

Что верно и что мы докажем

Теорема

Любой аукцион не менее чем 2.42-оптимален относительно $F^{(2)}$.

- Но мы докажем штуку попроще.

Теорема

Любой аукцион с двумя агентами не менее чем 2-оптимален относительно $F^{(2)}$.

Доказательство

- Общая идея такая: сначала мы рассмотрим ставки, взятые случайно из некоторого распределения.
- Затем докажем, что $\mathbf{E}_{\mathbf{b}}[\mathcal{A}(\mathbf{b})] \leq \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{b}}[F^{(2)}(\mathbf{b})]}{2}$.
- Из этого будет следовать, что есть вектор $\mathbf{b}^*$, для которого $\mathcal{A}(\mathbf{b}^*) \leq \frac{F^{(2)}(\mathbf{b}^*)}{2}$.

Доказательство

- Выберем распределение так, чтобы проще было искать $\mathbf{E}_{\mathbf{b}}[\mathcal{A}(\mathbf{b})]$ (нам ведь для каждого аукциона надо анализировать).
- Вспомним пример из самого начала лекции: мы тогда нашли такое распределение, на котором какую цену ни возьми, прибыль будет одна и та же.
- И сейчас мы его тоже используем... какое оно?

Доказательство

- Рассмотрим $\mathbf{b}$, для которого $\Pr[b_i > z] = \frac{1}{z}$.
- Это значит, что для любой цены t_i ожидаемая выплата агента i равна $t_i \times \Pr[b_i \geq t_i] = 1$.
- Значит, ожидаемая прибыль *любого* аукциона $\mathcal{A}$ равна $\mathbf{E}_{\mathbf{b}}[\mathcal{A}(\mathbf{b})] = n$, т.е. 2 в случае двух агентов.

Доказательство

- А какое будет $\mathbf{E}_{\mathbf{b}}[F^{(2)}(\mathbf{b})]$?
- $F^{(2)}(\mathbf{b}) = \max_{i\geq 2} ib_{(i)}$, где $b_{(i)}$ — i-я сверху ставка.
- Для двух агентов это просто $F^{(2)}(b_1, b_2) = 2b_{(2)} = 2\min\{b_1, b_2\}$.
- Значит,

$$\Pr{}_{\mathbf{b}}\left[F^{(2)}(\mathbf{b}) > z\right] = \Pr{}_{\mathbf{b}}\left[b_1 \geq \frac{z}{2} \wedge b_2 \geq \frac{z}{2}\right] = \\ = \Pr{}_{\mathbf{b}}\left[b_1 \geq \frac{z}{2}\right]\Pr{}_{\mathbf{b}}\left[b_2 \geq \frac{z}{2}\right] = \frac{4}{z^2}.$$

Доказательство

- $\Pr_{\mathbf{b}}\left[F^{(2)}(\mathbf{b}) > z\right] = \frac{4}{z^2}$.
- Это верно для $z \geq 2$; очевидно, что для $z < 2$ $\Pr_{\mathbf{b}}\left[F^{(2)}(\mathbf{b}) > z\right] = 1$.
- Таким образом,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{b}}\left[F^{(2)}(\mathbf{b})\right] = \int_0^\infty \Pr{}_{\mathbf{b}}\left[F^{(2)}(\mathbf{b}) \geq z\right] dz = 2 + \int_0^\infty \frac{4}{z^2} dz = 4.$$

Доказательство

- Вот и всё доказали: нашли распределение, для которого

$$\mathbf{E}_{\mathbf{b}}\left[F^{(2)}(\mathbf{b})\right] = 4 \geq 2 \times 2 = 2 \times \mathbf{E}_{\mathbf{b}}\left[\mathcal{A}(\mathbf{b})\right].$$

- Значит, можно выбрать такой b^*, для которого $\mathcal{A}(\mathbf{b}^*) \leq \frac{F^{(2)}(\mathbf{b}^*)}{2}$.

Outline

Постановка

- Как и прежде, у нас есть некая вещь и N агентов, которые хотят её купить.
- У агентов есть свои цены x_i.
- У нас есть N копий вещи, так что мы можем хоть каждому агенту продать (digital good).

Постановка

- Теперь задача модифицируется: агенты приходят по одному, и мы должны каждому выдать цену.
- То есть на шаге i приходит агент со ставкой b_i, и механизм решает, продать ли ему (бит d_i) и по какой цене p_i.
- Для правдивости нужно, чтобы d_i и p_i не зависели от b_i.

Минимальная выигрывающая ставка

- Как и раньше, суть в том, чтобы определять минимальную выигрывающую ставку t_i: минимальную ставку, при которой агент i выигрывает.
- Для правдивости нужно, чтобы t_i не зависело от ставки b_i.
- А для онлайновости нужно, чтобы t_i не зависело от ставок агентов, которые придут потом.
- То есть это функция $t_i(b_1, \ldots, b_{i-1})$.

Цель

- Как и прежде, наша цель — приблизиться к бенчмарке.
- На этот раз мы приближаемся к бенчмарке $\mathcal{F}(\mathbf{b})$ — прибыли от продажи по одной оптимальной цене:

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \max_p p \times \{\text{к-во участников с } x_i \geq p\}.$$

- И, как и прежде, будем пытаться делать сколько-нибудь-оптимальные алгоритмы.

Постановка

- Перед нами стоит задача:
  - ставки из $[1, h]$;
  - n агентов;
  - на раунде i механизм
    1. выбирает цену предложения t_i,
    2. узнаёт b_i,
    3. получает $p_i = t_i$, если $t_i \leq b_i$, и 0 в противном случае;
  - цель — приблизиться к $\mathcal{F}(\mathbf{b})$.

Постановка

- В machine learning есть такая задача.
  - k экспертов;
  - n итераций;
  - на раунде i алгоритм
    1. выбирает эксперта j,
    2. узнаёт payoffs $q_1^{(i)}, \ldots, q_k^{(i)}$,
    3. получает $q_j^{(i)}$;
  - цель — приблизиться к оптимальному эксперту, к $\max_j \sum_{i=1}^n q_j^(i)$.

Пример

- Пример — есть k предсказателей погоды.
- Мы каждый вечер их опрашиваем на завтра и выбираем, кому поверить.
- Получаем соответствующую прибыль (узнавая при этом, насколько они все были точны).
- Наша цель — максимально приблизиться к самому лучшему из предсказателей.

Сведение

- Давайте сведём задачу онлайн-аукциона к задаче expert learning.
- Пусть эксперт j на каждом шаге предлагает установить цену 2^j.
- Его payoff тогда получается 2^j, когда $2^j \le b_i$, и 0 в противном случае.
- Здесь $k = \log h$ (ставки в $[0, h]$).

Сведение

- Тогда получается соответствие между лучшим экспертом и лучшей ценой из тех, которые являются степенями двойки.
- То есть оптимальный алгоритм expert learning даст 2-оптимальный онлайн-аукцион.
- Разумеется, 2 можно заменить на $1+\epsilon$, а экспертов всё равно будет $O(\log h)$.
- Но мы в дальнейшем будем просто предполагать, что константа равна 2.

Follow the leader

- Вот пример алгоритма, (не) решающего задачу экспертного обучения.
- Follow the leader:
  - Пусть $s_j^{(i)} = \sum_{i'=1}^{i} q_j^{(i')}$ — общий доход эксперта j вплоть до раунда i.
  - На раунде i выберем $j = \mathrm{argmax}_j s_j^{(i-1)}$.

Плохой пример

- Рассмотрим пример со следующими доходами экспертов:

	1	2	3	4	...
Expert 1:	$\frac{1}{2}$	0	1	0	...
Expert 2:	0	1	0	1	...

- Понятно, что тут вообще ничего не получится.
- Но идея хороша; надо только чуть рандомизировать.

Weighted Majority

- Предположим, что доходы экспертов лежат в $[0, h]$.
- Тогда опять рассмотрим $s_j^{(i)} = \sum_{i'=1}^{i} q_j^{(i')}$.
- Теперь в раунде i будем выбирать эксперта j с вероятностью, пропорциональной $2^{\frac{s_j^{(i-1)}}{h}}$.

Как работает Weighted Majority

Теорема

Для доходов экспертов в $[0, h]$ *ожидаемый доход Weighted Majority*

$$\mathbf{E}[\mathrm{Payoff}] \geq \frac{\mathrm{Opt}}{2} - O(\frac{h}{k}\log k).$$

- Доказывать не будем.

Как работает Weighted Majority

Теорема

Для доходов экспертов в $[0, h]$ ожидаемый доход Weighted Majority

$$\mathbf{E}[\mathrm{Payoff}] \geq \frac{\mathrm{Opt}}{2} - O(\frac{h}{k}\log k).$$

Следствие

Алгоритм Weighted Majority для онлайн-аукционов позволяет достичь

$$\mathbf{E}[\mathrm{Profit}] \geq \frac{\mathcal{F}}{4} - O(h \log\log h).$$

Outline

Алгоритм

- Kalai's Online Learning Algorithm.
- Предположим, что доходы экспертов лежат в $[0, h]$.
  1. Галлюцинации: установим $s_j^{(0)} = h \times \{\text{к-во орлов подряд}\}$.
  2. В раунде i выбираем эксперта $j = \mathrm{argmax}_{j'}(s_{j'}^{(0)} + s_{j'}^{(i-1)})$.

Качество

Теорема

Для алгоритма Kalai $\mathbf{E}[\mathrm{Payoff}] \geq \frac{\mathrm{Opt}}{2} - O(h \log k)$.

- План доказательства:
  - Сначала предположим, что вместо follow-the-leader у нас be-the-leader, т.е. $\mathrm{argmax}_{j'}(s_{j'}^{(0)} + s_{j'}^{(i)})$.
  - Потом докажем, что follow-the-leader не более чем вдвое хуже, чем be-the-leader.

Качество

Теорема

Для алгоритма Kalai $\mathbf{E}[\mathrm{Payoff}] \geq \frac{\mathrm{Opt}}{2} - O(h \log k)$.

- Сначала докажем, что для be-the-leader $\mathbf{E}[\mathrm{Payoff}] \geq \frac{\mathrm{Opt}}{-} O(h \log k)$.
- Обозначим через H_i доход лучшего эксперта.
- $H_0 = \max_j s_j^{(0)}$; $H_n = \max_j s_j^{(0)} + s_j^{(n)}$.
- Be-the-leader на шаге i обязательно получит не меньше $H_i - H_{i-1}$.

Качество

Теорема

Для алгоритма Kalai $\mathbf{E}[\mathrm{Payoff}] \geq \frac{\mathrm{Opt}}{2} - O(h \log k)$.

- Значит, общий доход будет $H_n - H_0$.
- $H_n \geq \mathrm{Opt}$, т.е. и $\mathbf{E}[H_n] \geq \mathrm{Opt}$.
- H_0 — это максимум из h умножить на k геометрических случайных величин (количества орлов).

Качество

Теорема

Для алгоритма Kalai $\mathbf{E}[\mathrm{Payoff}] \geq \frac{\mathrm{Opt}}{2} - O(h \log k).$

- Упражнение: доказать, что этот максимум равен $O(\log k)$.

Качество

Теорема

Для алгоритма Kalai $\mathbf{E}[\mathrm{Payoff}] \geq \frac{\mathrm{Opt}}{2} - O(h \log k)$.

- Таким образом, ожидаемый доход алгоритма be-the-leader $\mathrm{Opt} - O(h \log k)$.
- Теперь нужно доказать, что follow-the-leader не более чем вдвое хуже.

Качество

Теорема

Для алгоритма Kalai $\mathbb{E}[\mathrm{Payoff}] \geq \frac{\mathrm{Opt}}{2} - O(h \log k)$.

- Мы докажем, что вероятность того, что лидер останется прежним, в каждом раунде по крайней мере $\frac{1}{2}$.
- Тогда, поскольку доход всё равно неотрицателен даже в противном случае, всё получится.
- Чтобы это доказать, рассмотрим один раунд, рассмотрим доход $s_j^{(i)}$ без галлюцинаций, а потом добавим галлюцинации хитрым образом.

Качество

Теорема

Для алгоритма Kalai $\mathbf{E}[\mathrm{Payoff}] \geq \frac{\mathrm{Opt}}{2} - O(h \log k)$.

- Сначала для всех j $s_j^{(0)} = 0$, галлюцинаций нет.
- Выберем эксперта с наименьшей суммой, $j = \mathrm{argmin}_{j'}(s_{j'}^{(0)} + s_{j'}^{(i)})$.
- Подбросим монетку:
  - Решка: добавим ещё h к галлюцинации эксперта j: $s_j^{(0)} \leftarrow s_j^{(0)} + h$.
  - Орёл: отбросим вообще этого эксперта. Его галлюцинация останется равной $s_j^{(0)}$, и общей суммы точно не хватит, чтобы стать лучшим на этом шаге.
- Это повторять, пока не останется один эксперт.

Качество

Теорема

Для алгоритма Kalai $\mathbf{E}[\mathrm{Payoff}] \geq \frac{\mathrm{Opt}}{2} - O(h \log k)$.

- В конце концов у экспертов галлюцинации будут как раз геометрические.
- Более того, у лидера ещё останется монетка в запасе.
- Если она выпадет решкой, то эксперт, получается, будет лидировать более чем на h. Поэтому, даже если отнять от него его текущий раунд $q_j^{(i)}$, он всё равно будет лидировать.
- Значит, он и на предыдущем раунде был лидером. Вот и всё.

Итоги

- Итого получилось, что мы решаем экспертное обучение с $\frac{\mathrm{Opt}}{2} - O(h \log k)$.

Outline

Замечание из предыдущей серии

- Мы там доказывали оценки, предполагая, что на экспертов есть оценка h.
- Это не просто так: мы этим постоянно пользовались, ключевой момент был в том, что $h \geq q_j^{(i)}$.
- Но когда мы используем экспертное обучение для онлайн-алгоритмов, мы знаем, какие там выплаты, а именно 2^j.
- То есть мы можем уверенно говорить, что выплата эксперта j ограничена $h_j = 2^j$.

Non-uniform алгоритм

- Предположим, что доходы эксперта j лежат в $[0, h_j]$.
  1. Галлюцинации: установим $s_j^{(0)} = h_j \times \{\text{к-во орлов подряд}\}$.
  2. В раунде i выбираем эксперта $j = \mathrm{argmax}_{j'}(s_{j'}^{(0)} + s_{j'}^{(i-1)})$.

Теорема

Теорема

Для этого алгоритма $\mathbf{E}[\mathrm{Payoff}] \geq \frac{\mathrm{Opt}}{2} - \frac{1}{2}\sum_j h_j$.

- Доказательство следует той же схеме. Сначала докажем, что be-the-leader работает как $\mathrm{Opt} - \sum_j h_j$.

Теорема

Теорема

Для этого алгоритма $\mathbf{E}[\mathrm{Payoff}] \geq \frac{\mathrm{Opt}}{2} - \frac{1}{2}\sum_j h_j.$

- Это точно так же, но на последнем шаге, когда оцениваем $\mathbf{E}[H_0]$, скажем, что ожидаемый максимум галлюцинаций уж точно меньше, чем сумма всех галлюцинаций.

Теорема

Теорема

Для этого алгоритма $\mathbf{E}[\mathrm{Payoff}] \geq \frac{\mathrm{Opt}}{2} - \frac{1}{2}\sum_j h_j$.

- Чтобы доказать, что follow-the-leader вдвое хуже, нужно то же самое доказательство, просто $q_j^{(i)} \leq h_j$.
- Вот и всё.

Обсуждение

- Вот, собственно, и всё на сегодня.
- Но это не совсем всё из того, что люди делают.

Обсуждение

- Ещё направление: online posted price mechanisms.
- Здесь в каждом раунде продавец выставляет цену, но ничего не узнаёт о ставке покупателя.
- Покупатель просто либо берёт товар по этой цене, либо не берёт.
- Это вполне естественная ситуация.

Обсуждение

- Ещё направление: limited supply online auctions.
- Это когда у нас ограниченное количество вещей на продажу.
- То есть если всё быстро продать, можно огорчиться, когда придут ребята с высокими ставками.
- Тут тоже есть нюансы. Возможно, всё это мы рассмотрим позже.

Спасибо за внимание!

- Lecture notes и слайды будут появляться на моей homepage:
  http://logic.pdmi.ras.ru/~sergey/index.php?page=teaching
- Присылайте любые замечания, решения упражнений, новые численные примеры и прочее по адресам: sergey@logic.pdmi.ras.ru, snikolenko@gmail.com
- Заходите в ЖЖ smartnik.