Аукционы с зависимыми ценностями

Сергей Николенко

Теория экономических механизмов — ИТМО, весна 2008

Outline

Постановка

- Мы опять в контексте обычных аукционов.
- Есть агенты, у агента i есть ценность v_i.
- Они пытаются что-то купить (пока что одну вещь).

Неполная информация

- Первое обобщение — теперь агент не знает своей скрытой ценности, а знает только примерно.
- У него есть некий неточный сигнал (noisy signal) $X_i \in [0, \omega_i]$.
- А точное значение его ценности V_i — это функция от всех сигналов
$$V_i = v_i(X_1, X_2, \ldots, X_N).$$
- Это и значит, что ценности агентов зависят друг от друга.

Неполная информация

- Мы написали V_i, потому что V_i при таком подходе для i становится случайной величиной (он не знает ценностей других агентов).
- А ещё потому, что другая похожая ситуация (её мы тоже рассмотрим) — это когда агенты даже в сумме не всё знают, а есть ещё сигнал S, доступный только продавцу:

$$v_i(x_1, \ldots, x_N) = \mathbf{E}_S[V_i | X_1 = x_1, \ldots, X_N = x_N].$$

- И тогда, кстати, продавец может решить, говорить всем S или не говорить...

Общая ценность

- Часто предполагают, что все v_i равны, т.е. есть некая общечеловеческая ценность

$$V = v(X_1, \ldots, X_N),$$

а частные ценности X_i распределены вокруг неё.

- Будем даже предполагать, что $\mathbf{E}[X_i | V = v] = v$.
- Типичный пример — аукционы по разработке месторождений. Поэтому это называется «mineral rights model».

Winner's curse

- Именно в такой ситуации возникает пресловутый winner's curse.
- Очевидно, что наибольшее из X_i *пере*оценивает V (раз V — это среднее у каждого из X_i).
- Поэтому в аукционе первой цены участники должны делать на это определённую поправку — какую, увидим.
- Ещё обратите внимание, что этот curse зависит от количества участников — чем больше участников, тем хуже в среднем приходится победителю.

Аукцион второй цены и английский аукцион

- Ещё одно следствие зависимости — аукционы второй цены и английский (восходящий) перестают быть эквивалентными.
- В процессе восходящего аукциона у участника появляется новая информация — ставки других участников (то, где они отваливались).
- Если с частными независимыми ценностями это было не важно, то теперь это может повлиять на оценку самого участника.

Аффилированные сигналы

- Мы также отказываемся от предположения, что распределения X_i независимы.
- Появляется единая совместная плотность $f(\mathbf{X})$, не равная $\prod_i f_i(X_i)$.
- Но мы предположим ещё немножко о поведении этой плотности.

Аффилированные сигналы

- Мы предполагаем, что сигналы *аффилированы* (affiliated signals), т.е. чем больше одни сигналы, тем больше должны быть другие. Формально говоря:

Определение

Случайные величины $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_N)$ *называются аффилированными, если* $\forall\ \mathbf{x}', \mathbf{x}''$

$$p(\mathbf{x}' \vee \mathbf{x}'')p(\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}'') \geq p(\mathbf{x}')p(\mathbf{x}''),$$

где $\mathbf{x}' \vee \mathbf{x}'' = (\max(x_1', x_1''), \ldots, \max(x_N', x_N''))$ *и* $\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}'' = (\min(x_1', x_1''), \ldots, \min(x_N', x_N''))$.

Аффилированные сигналы

- Бывают такие *супермодулярные* функции; это когда

$$f(\mathbf{x}' \vee \mathbf{x}'') + f(\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}'') \geq f(\mathbf{x}') + f(\mathbf{x}'').$$

- То есть $\mathbf{X}$ аффилированы iff $\ln p$ супермодулярна.

Упражнение. Докажите, что для гладких f супермодулярность эквивалентна тому, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \ln f \geq 0.$$

Аффилированные сигналы

- Рассмотрим переменные $Y_1, \ldots, Y_{N-1}$ — те самые $X_2, \ldots, X_N$, упорядоченные по значениям.
- Тогда из аффилированности следует, что совместная плотность g величин $X_1, Y_1, \ldots, Y_{N-1}$

$$g(x_1, y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}) = (n-1)! p(x_1, y_1, \ldots, y_{N-1}),$$

  если $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_{N-1} \geq 0$, и 0 в противном случае.
- То есть, если $X_1, \ldots, X_N$ симметричны и аффилированы, то $X_1, Y_1, \ldots, Y_{N-1}$ тоже аффилированы.

Аффилированные сигналы

- Рассмотрим теперь две переменные — X и Y с совместной плотностью $p : [0, \omega]^2 \to \mathbb{R}$. Если X и Y аффилированы, то

$$\forall\, x' \geq x, y' \geq y \quad f(x', y)f(x, y') \leq f(x, y)f(x', y'), \text{ то есть}$$

$$\frac{f(x, y')}{f(x, y)} \leq \frac{f(x', y')}{f(x', y)}, \text{ то есть}$$

$$\frac{f(y'|x)f(x)}{f(y|x)f(x)} \leq \frac{f(y'|x')f(x')}{f(y|x')f(x')}, \text{ то есть}$$

$$\frac{f(y'|x)}{f(y|x)} \leq \frac{f(y'|x')}{f(y|x')}.$$

Аффилированные сигналы

- $\frac{f(y'|x)}{f(y|x)} \leq \frac{f(y'|x')}{f(y|x')}$. Это значит, что функция likelihood ratio

  $$\frac{f(\cdot|x')}{f(\cdot|x)}$$

  возрастает для всех $x' \geq x$. Это называется *monotone likelihood ratio property*.
- Ещё говорят, что F доминирует над G в терминах likelihood ratio. Из этого много чего следует.

Аффилированные сигналы

- Пусть $\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{f(y)}{g(y)}$ для всех $x < y$.
- Это эквивалентно $\frac{f(y)}{f(x)} \geq \frac{g(y)}{g(x)}$, т.е.

$$\forall x \quad \int_x^{\omega} \frac{f(y)}{f(x)} dy \geq \int_x^{\omega} \frac{g(y)}{g(x)} dy, \text{ и}$$

$$\frac{1 - F(x)}{f(x)} \geq \frac{1 - G(x)}{g(x)}.$$

- Это называется F доминирует над G в терминах доли риска (λ, hazard rate).

Аффилированные сигналы

- Пусть $\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{f(y)}{g(y)}$ для всех $x < y$.
- Это эквивалентно $\frac{f(x)}{f(y)} \leq \frac{g(x)}{g(y)}$, т.е.

$$\forall x \quad \int_0^y \frac{f(x)}{f(y)} dx \geq \int_0^y \frac{g(x)}{g(y)} dx, \text{ и}$$

$$\frac{F(y)}{f(y)} \geq \frac{G(y)}{g(y)}.$$

- Это уже называется F доминирует над G в терминах обратной доли риска (σ, reverse hazard rate).

Аффилированные сигналы

- Но мы помним, что $F(x) = 1 - e^{-\int_0^x \lambda(t)dt}$ (если не помним — упражнение :)).
- Значит, из $\lambda_F \leq \lambda_G$ следует, что $F(x) \leq G(x)$ для всех x.
- Для $F = F(\cdot|x')$, $G = F(\cdot|x)$ из этого доминирования следует ещё, что для всех y $F(y|\cdot)$ неубывает.

Аффилированные сигналы

- Если X и Y аффилированы, то $F(y|\cdot)$ неубывает.
- А это значит, что $\mathbf{E}[Y|X=x]$ неубывает от x, т.е. X и Y положительно коррелируют.
- Также верно, что (проверьте!) для всякой неубывающей γ $\mathbf{E}[\gamma(Y)|X=x]$ неубывает от x.
- Вернёмся теперь к аукционам.

Аффилированные сигналы

- $X_1, \ldots, X_N$ аффилированы, значит, $X_1, Y_1, \ldots, Y_{N-1}$ тоже аффилированы.
- X_1 и Y_1 аффилированы, значит, если $x' > x$, то для распределения $G(\cdot|x)$ — распределения Y_1 при условии $X_1 = x$ — $G(\cdot|x')$ доминирует над $G(\cdot|x)$ в терминах обратной доли риска:
$$\frac{g(y|x')}{G(y|x')} \leq \frac{g(y|x)}{G(y|x)}.$$
- Более того, для всякой возрастающей функции γ, если $x' > x$, то
$$\mathbf{E}[\gamma(Y_1)|X_1 = x'] \geq \mathbf{E}[\gamma(Y_1)|X_1 = x].$$
- Вот какие следствия мы смогли извлечь из аффилированности наших сигналов.

Симметричная модель

- Начнём с симметричной модели.
- Все X_i берутся из $[0, \omega]$, и есть единая функция

$$v_i(\mathbf{X}) = u(X_i, \mathbf{X}_{-i}),$$

  симметричная относительно последних $N-1$ переменных.
- Плотность совместной вероятности f — симметричная функция, сигналы аффилированы.

Симметричная модель

- Определим самую главную функцию:

$$v(x, y) = \mathbf{E}[V_1 | X_1 = x, Y_1 = y].$$

- Ожидание дохода игрока 1, когда у него наивысший x, а среди других наивысший y.
- По симметрии, v не зависит от игрока, по $\mathbf{E}[\gamma(Y_1)|X_1 = x'] \geq \mathbf{E}[\gamma(Y_1)|X_1 = x]$, v неубывает от своих переменных, а ещё $v(0, 0) = 0$.

Outline

Аукцион второй цены

Теорема

В аукционе второй цены симметричное равновесие достигается при

$$\beta^{II}(x) = v(x, x).$$

- Пусть остальные агенты играют по $\beta = \beta^{II}$.
- Вычислим доход агента 1 с сигналом x и ставкой b.

Аукцион второй цены

Теорема

В аукционе второй цены симметричное равновесие достигается при

$$\beta^{II}(x) = v(x, x).$$

$$\Pi(b, x) = \int_0^{\beta^{-1}(b)} (v(x, y) - \beta(y))g(y|x)dy =$$

$$= \int_0^{\beta^{-1}(b)} (v(x, y) - v(y, y))g(y|x)dy,$$

где $g(\cdot|x)$ — плотность $Y_1 = \max_{i \neq 1} X_i$ при условии $X_1 = x$.

Аукцион второй цены

Теорема

В аукционе второй цены симметричное равновесие достигается при

$$\beta^{II}(x) = v(x, x).$$

- $\Pi(b, x) = \int_0^{\beta^{-1}(b)} (v(x, y) - v(y, y)) g(y|x) dy.$
- v возрастает, значит, $v(x, y) < v(y, y)$ для всех $y > x$.
- Значит, максимум достигается, когда выбираем $\beta^{-1}(b) = x$, т.е. $b = \beta(x)$.

Пример

- Для примера: $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$, $Z = \max\{X_1, X_2, X_3\}$, X_i при условии $V = v$ равномерны на $[0, 2v]$ и независимы.
- Плотность X_i при условии $V = v$ равна $\frac{1}{2v}$ на $[0, 2v]$.
- Значит, совместное распределение $(V, \mathbf{X})$ будет $\frac{1}{8v^3}$ на $\{(V, \mathbf{X}) | X_i \le 2V\}$.

Пример

- Всё что нам говорят X_i о V — это то, что $V \geq \frac{1}{2}Z$. Значит,

$$p(x_1, x_2, x_3) = \int_{\frac{1}{2}z}^{1} \frac{1}{8v^3} dv = \frac{4 - z^2}{16z^2}.$$

- Значит, $p(V|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = p(V|Z = z)$, и

$$p(v|Z = z) = \frac{p(v, z)}{p(z)} = \frac{1}{8v^3} \frac{16z^2}{4 - z^2} \text{ на } [\frac{1}{2}z, 1].$$

Пример

- Итого имеем:

$$\mathbf{E}[V|\mathbf{X}=\mathbf{x}] = \mathbf{E}[V|Z=z] = \int_{\frac{1}{2}z}^{1} vf(v|\mathbf{X}=\mathbf{x})dv = \frac{2z}{2+z}.$$

- А это значит, что

$$v(x,y) = \mathbf{E}[V|X_1=x, Y_1=y] =$$
$$= \mathbf{E}[V|Z=\max\{x,y\}] = \frac{2\max\{x,y\}}{2+\max\{x,y\}}, \text{ то есть}$$

$$\beta^{II}(x) = v(x,x) = \frac{2x}{2+x}.$$

Английский аукцион

- При английском аукционе мы теперь видим, кто когда выходит из игры.
- Значит, симметрическая равновесная стратегия превращается в $\beta = (\beta^N, \beta^{N-1}, \ldots, \beta^2)$, где каждая β^k показывает собой $\beta^k(x, p_{k+1}, \ldots, p_N)$ — цену на которой игрок 1 выйдет из игры, если остались ещё k агентов, его сигнал равен x, и цены остальных вышедших составляли $p_{k+1} \geq p_{k+2} \geq \ldots \geq p_N$.

Английский аукцион

- Предлагаем вот какую стратегию. Во-первых, вначале

$$\beta^N(x) = u(x, x, \dots, x).$$

- u — utility, $v_i(\mathbf{X}) = u(X_i, \mathbf{X}_{-i})$.
- β^N непрерывна и возрастает.

Английский аукцион

- Пусть агент N выходит из аукциона на цене p_N. Тогда

$$\beta^{N-1}(x, p_N) = u(x, \ldots, x, x_N), \quad \beta^{N}(x_N) = p_N.$$

- И так далее, если вышли $N, \ldots, k+1$, то

$$\beta^{k}(x, p_{k+1}, \ldots, p_N) = u(x, \ldots, x, x_{k+1}, \ldots, x_N),$$

где $\beta^{k+1}(x_{k+1}, p_{k+2}, \ldots, p_N) = p_{k+1}$.

Английский аукцион

- Иначе говоря, игрок определяет, надо ли ему отваливаться на p.
- Спрашивает себя: что будет, если я сейчас выиграю? Это возможно, только если все остальные прямо сейчас на p отвалятся.
- Значит, такие у них сигналы y, что $\beta^k(y, p_{k+1}, \ldots, p_N) = p$.
- Значит, ценность объекта $u(x, y, \ldots, y, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_N)$.
- Значит, продолжать есть смысл iff эта штука больше p.

Английский аукцион

Теорема

Такие стратегии β являются симметричными и равновесными.

- Как водится, рассмотрим $X_1 = x$, остальные играют по β, определим $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N-1}$.
- Пусть Y_j таковы, что 1 при следовании β выигрывает объект; то есть $x > y_1$.

Английский аукцион

Теорема

Такие стратегии β являются симметричными и равновесными.

- Тогда цена, которую 1 заплатит, — это цена, где отваливается y_1, т.е. $u(y_1, y_1, y_2, \ldots, y_N)$.
- Т.к. $x > y_1$, то выгода игрока 1

$$u(x, y_1, \ldots, y_N) - u(y_1, y_1, \ldots, y_N) > 0.$$

Английский аукцион

Теорема

Такие стратегии β являются симметричными и равновесными.

- Т.к. игрок 1 не контролирует цену, которую заплатит, то лучше, чем от β, ему в этом случае не будет.
- А если он при β не выигрывает, т.е. $x < y_1$, то если он всё-таки решит выиграть, то доход будет

$$u(x, y_1, \ldots, y_N) - u(y_1, y_1, \ldots, y_N) < 0.$$

- Значит, игроку 1 невыгодно отклоняться от β.

Английский аукцион

- Особенность этого равновесия в том, что оно зависит только от u и не зависит от f.
- Для каждого данного u равновесие β не сместится, если изменить распределение.
- Т.е. стратегии образуют равновесие ex post.
- Это в том числе даёт свойство “no regret”: при любом распределении сигналов, даже если его потом всем рассказать, никому не будет обидно.

Аукцион первой цены

- Теперь рассмотрим аукцион первой цены.
- Сначала выведем стратегию эвристически, как обычно.
- Обозначим β равновесную стратегию, а $G(\cdot|x)$ — распределение Y_1 при условии $X_1 = x$; соответственно, $g(\cdot|x)$ — плотность.

Аукцион первой цены

- Тогда ожидаемый доход агента 1 при собственном сигнале x и ставке $\beta(x)$ равен

$$\Pi(z,x) = \int_0^z (v(x,y) - \beta(z))g(y|x)dy = \\ = \int_0^z v(x,y)g(y|x)dy - \beta(z)G(z|x).$$

- Из условия оптимальности получается диффур:

$$(v(x,z) - \beta(z))g(z|x) - \beta'(z)G(z|x) = 0.$$

Аукцион первой цены

- В симметричном равновесии $z = x$, т.е.

$$\beta'(x) = (v(x,x) - \beta(x))\frac{g(x|x)}{G(x|x)}.$$

- Кроме того, $\beta(0) = 0$.

Аукцион первой цены

Теорема

В аукционе первой цены симметричное равновесие достигается на

$$\beta^I(x) = \int_0^x v(y, y) dL(y|x), \quad L(y|x) = e^{-\int_y^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)} dt}.$$

- Во-первых, отметим, что $L(\cdot|x)$ — функция распределения на $[0, x]$.
- Это потому, что из-за аффилированности для всех $t > 0$

$$\frac{g(t|t)}{G(t|t)} \geq \frac{g(t|0)}{G(t|0)}.$$

Аукцион первой цены

Теорема

В аукционе первой цены симметричное равновесие достигается на

$$\beta^I(x) = \int_0^x v(y,y)dL(y|x), \quad L(y|x) = e^{-\int_y^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)}dt}.$$

- Итак,

$$-\int_0^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)}dt \leq -\int_0^x \frac{g(t|0)}{G(t|0)}dt =$$
$$= -\int_0^x \frac{d}{dt}(\ln G(t|0))dt = \ln G(0|0) - \ln G(x|0) = -\infty.$$

- Значит, $L(0|x) = 0$. Кроме того, $L(x|x) = 1$ и $L(\cdot|x)$ неубывает — вот и функция распределения.

Аукцион первой цены

Теорема

В аукционе первой цены симметричное равновесие достигается на

$$\beta^I(x) = \int_0^x v(y,y)dL(y|x), \quad L(y|x) = e^{-\int_y^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)}dt}.$$

- Затем отметим из аффилированности, что $L(\cdot|x') \leq L(\cdot|x)$ для $x' > x$.
- Т.к. $v(y,y)$ возрастает от y, то и $\beta = \beta^I$ тоже возрастает от x.

Аукцион первой цены

Теорема

В аукционе первой цены симметричное равновесие достигается на

$$\beta^I(x) = \int_0^x v(y,y)dL(y|x), \quad L(y|x) = e^{-\int_y^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)}dt}.$$

- Рассмотрим теперь агента, который ставит $\beta(z)$ при сигнале x. Тогда, т.к. β возрастает,

$$\Pi(z,x) = \int_0^z (v(x,y) - \beta(z))g(y|x)dy.$$

Аукцион первой цены

Теорема

В аукционе первой цены симметричное равновесие достигается на

$$\beta^I(x) = \int_0^x v(y,y)dL(y|x), \quad L(y|x) = e^{-\int_y^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)}dt}.$$

- Продифференцируем по z:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = (v(x,z) - \beta(z))g(z|x) - \beta'(z)G(z|x) =$$
$$= G(z|x)\left((v(x,z) - \beta(z))\frac{g(z|x)}{G(z|x)} - \beta'(z)\right).$$

Аукцион первой цены

Теорема

В аукционе первой цены симметричное равновесие достигается на

$$\beta^I(x) = \int_0^x v(y,y)dL(y|x), \quad L(y|x) = e^{-\int_y^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)}dt}.$$

- Если $z < x$, то т.к. $v(x,z) > v(z,z)$ и из-за аффилированности
$$\frac{g(z|x)}{G(z|x)} > \frac{g(z|z)}{G(z|z)}, \text{ и}$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} > G(z|x)\left((v(x,z) - \beta(z))\frac{g(z|z)}{G(z|z)} - \beta'(z)\right) = 0.$$
- Аналогично, при $z > x$ $\frac{\partial \Pi}{\partial z} < 0$. Т.е. $\Pi(z,x)$ максимизируется в $z = x$.

Аукцион первой цены

- $\beta^I(x) = \int_0^x v(y,y) dL(y|x), \quad L(y|x) = e^{-\int_y^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)}dt}$.
- Это, конечно, обобщение того, что мы уже знали: при частных значениях $v(y,y) = y$, а при независимых сигналах $G(\cdot|x) = G(\cdot)$, и

$$L(y|x) = e^{-\int_y^x \frac{g(t)}{G(t)}dt} = \frac{1}{G(x)} G(y).$$

Аукцион первой цены: пример

- Рассмотрим переменные S_1, S_2, T — равномерны и независимы на $[0,1]$.
- Два участника: $X_1 = S_1 + T$, $X_2 = S_2 + T$, и общая ценность
$$V = \frac{1}{2}(X_1 + X_2).$$
- T нужно для того, чтобы X_1 и X_2 были аффилированы (проверьте!).
- Участника два, значит, $Y_1 = X_2$.

Аукцион первой цены: пример

- Совместная плотность X_1 и Y_1 вычисляется отдельно на разных треугольных участках.

Упражнение. Докажите, что для всех $x \in [0, 2]$

$$\frac{g(x|x)}{G(x|x)} = \frac{2}{x}$$

и для всех $y \in [0, x]$

$$L(y|x) = \frac{y^2}{x^2}.$$

Аукцион первой цены: пример

- Тогда из доказанной теоремы получится, что

$$\beta^I(x) = \int_0^x v(y,y)dL(y|x) = \frac{2}{3}x$$

(с учётом того, что $v(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)$).

Outline

Сравнение доходов от разных аукционов

- У нас раньше был принцип эквивалентности доходности.
- Какой аукцион ни возьми, для аукционера они были одинаковые.
- А вот для зависимых ценностей это всё становится уже совершенно не так.

Английский против второй цены

Теорема

Ожидаемый доход от английского аукциона не меньше ожидаемого дохода от аукциона второй цены.

- В аукционе второй цены равновесие $\beta^{II}(x) = v(x, x)$, где $v(x, y) = \mathbf{E}[V_1 | X_1 = x, Y_1 = y]$.
- Для $x > y$, т.к. utility u возрастает и сигналы аффилированы,

$$\begin{aligned} v(y, y) &= \mathbf{E}[u(X_1, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N-1} | X_1 = y, Y_1 = y] = \\ &= \mathbf{E}[u(Y_1, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N-1} | X_1 = y, Y_1 = y] \leq \\ &\leq \mathbf{E}[u(X_1, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N-1} | X_1 = x, Y_1 = y]. \end{aligned}$$

Английский против второй цены

Теорема

Ожидаемый доход от английского аукциона не меньше ожидаемого дохода от аукциона второй цены.

- Доход получается как

$$\mathbf{E}[R^{II}] = \mathbf{E}[\beta^{II}(Y_1)|X_1 > Y_1] = \mathbf{E}[v(Y_1, Y_1)|X_1 > Y_1] \leq$$
$$\leq \mathbf{E}[\mathbf{E}[u(X_1, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N-1}|X_1 = x, Y_1 = y]|X_1 > Y_1] =$$
$$= \mathbf{E}[u(X_1, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N-1}|X_1 > Y_1] =$$
$$= \mathbf{E}[\beta^2(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N-1})] = \mathbf{E}[R^{\mathrm{Eng}}].$$

Английский против второй цены

Теорема

Ожидаемый доход от английского аукциона не меньше ожидаемого дохода от аукциона второй цены.

- Здесь β^2 — это стратегия английского аукциона, когда остаются два агента.
- Цена, на которой отваливается предпоследний агент — это как раз то, что платит победитель.

Английский против второй цены

Теорема

Ожидаемый доход от английского аукциона не меньше ожидаемого дохода от аукциона второй цены.

- Английский аукцион строго лучше, только если и зависимость есть, и сигналы аффилированы.
- Для независимых сигналов *или* индивидуальных значений аукционы эквивалентны.

Вторая цена против первой цены

Теорема

Ожидаемый доход от аукциона второй цены не меньше ожидаемого дохода от аукциона первой цены.

- В первой цене доход строго равен $\beta^I(x)$.
- Во второй цене доход $\mathbf{E}[\beta^{II}(Y_1)|X_1 = x, Y_1 < x]$, и

$$\mathbf{E}[\beta^{II}(Y_1)|X_1 = x, Y_1 < x] = \mathbf{E}[v(Y_1, Y_1)|X_1 = x, Y_1 < x] =$$

$$= \int_0^x v(y, y) dK(y|x), \text{ где } K(y|x) = \frac{1}{G(x|x)} G(y|x).$$

Вторая цена против первой цены

Теорема

Ожидаемый доход от аукциона второй цены не меньше ожидаемого дохода от аукциона первой цены.

- Отметим, что $K(\cdot|x)$ — функция распределения на $[0, x]$.
- Вспомним, что

$$\beta^I(x) = \int_0^x v(y, y) dL(y|x).$$

- Мы сейчас докажем, что для всех $y < x$ $K(y|x) \leq L(y|x)$. Поскольку v возрастает, отсюда будет следовать утверждение.

Вторая цена против первой цены

Теорема

Ожидаемый доход от аукциона второй цены не меньше ожидаемого дохода от аукциона первой цены.

- Начнём с того, что вспомним про аффилированность:

$$\frac{g(t|t)}{G(t|t)} \leq \frac{g(t|x)}{G(t|x)}.$$ Значит, для всех $y < x$

$$-\int_y^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)} dt \geq -\int_y^x \frac{g(t|x)}{G(t|x)} dt =$$

$$= -\int_y^x \frac{d}{dt}(\ln G(t|x))dt = \ln G(y|x) - \ln G(x|x) = \ln\left(\frac{G(y|x)}{G(x|x)}\right).$$

- Осталось применить экспоненту.

Вторая цена против первой цены: пример

- Вспомним тот же пример: S_1, S_2, T — равномерны и независимы на $[0, 1]$.
- Два участника: $X_1 = S_1 + T$, $X_2 = S_2 + T$, и общая ценность
$$V = \frac{1}{2}(X_1 + X_2).$$
- T нужно для того, чтобы X_1 и X_2 были аффилированы (проверьте!).
- Участника два, значит, $Y_1 = X_2$, $v(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)$.

Вторая цена против первой цены: пример

- $\frac{1}{2}(x+y)$. Значит, во второй цене $\beta^{II}(x)=x$. Значит,

$$\mathbf{E}[R^{II}]=\mathbf{E}[\min\{X_1,X_2\}]=\mathbf{E}[\min\{S_1,S_2\}]+\mathbf{E}[T]=\frac{5}{6}.$$

- В аукционе первой цены $\beta^{I}(x)=\frac{2}{3}x$, и

$$\mathbf{E}[R^{I}]=\mathbf{E}[\max\{\frac{2}{3}X_1,\frac{2}{3}X_2\}]=\frac{2}{3}\mathbf{E}[\min\{S_1,S_2\}]+\frac{2}{3}\mathbf{E}[T]=\frac{7}{9}.$$

- Вот и получилось, что $\mathbf{E}[R^{II}]>\mathbf{E}[R^{I}]$.

Итоги

- В итоге получается:

$$\mathbf{E}[R^{\mathrm{Eng}}] \geq \mathbf{E}[R^{II}] \geq \mathbf{E}[R^{I}].$$

Упражнение. Докажите, что winner's curse действительно имеет место:

$$\beta^{I}(x) < \mathbf{E}[V_1 | X_1 = x, Y_1 < x].$$

Пример неэффективного равновесия

- Оказывается, наши симметрические равновесия могут быть неэффективны.
- Например, рассмотрим два симметричных агента:

$$v_1(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2,$$

$$v_2(x_1, x_2) = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2.$$

- Тогда $v_1 > v_2$ iff $x_2 > x_1$, т.е. сигнал выше у агента с более низкой ценностью.
- Значит, практически все формы аукционов будут неэффективны.

Условие одного пересечения

Определение

Ценности удовлетворяют условию одного пересечения (single crossing condition) если для всех $i \neq j$ и всех $\mathbf{x}$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \geq \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

- То есть ценность i как функция от сигнала x_i в каждой точке круче j, поэтому они пересекутся не более чем один раз.
- В симметричном случае $v_i(\mathbf{x}) = u(x_i, \mathbf{x}_{-i})$, и u симметрична. Поэтому одно пересечение означает, что для всех $j \neq 1$ $u_1' \geq u_j'$, более того, достаточно $u_1' \geq u_2'$.

Условие одного пересечения

- Пусть $x_i > x_j$. Определим прямую через точки $(x_j, x_i, \mathbf{x}_{-ij})$ и $(x_i, x_j, \mathbf{x}_{-ij})$:

$$\alpha(t) = (1-t)(x_j, x_i, \mathbf{x}_{-ij}) + t(x_i, x_j, \mathbf{x}_{-ij}).$$

- Тогда

$$u(x_i, x_j, \mathbf{x}_{-ij}) = u(x_j, x_i, \mathbf{x}_{-ij}) + \int_0^1 \nabla u(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt, \text{ где}$$

$$\nabla u(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = u_1'(\alpha(t))(x_i - x_j) + u_2'(\alpha(t))(x_j - x_i) \geq 0,$$

т.к. $x_i > x_j$ и $u_1' \geq u_2'$.

Условие одного пересечения

- Значит, при $x_i > x_j$ ценность агента i $u(x_i, x_j, \mathbf{x}_{-ij})$ не меньше, чем ценность агента j $u(x_j, x_i, \mathbf{x}_{-ij})$.
- Это значит, что ex post значения всех агентов будут упорядочены так же, как их сигналы. Мы тем самым доказали следующее.

Теорема

Пусть для симметричных зависимых ценностей и аффилированных сигналов выполняется условие одного пересечения. Тогда симметричные равновесия аукционов первой цены, второй цены и английского аукциона все являются эффективными.

Спасибо за внимание!

- Lecture notes и слайды будут появляться на моей homepage:
  http://logic.pdmi.ras.ru/~sergey/index.php?page=teaching
- Присылайте любые замечания, решения упражнений, новые численные примеры и прочее по адресам: sergey@logic.pdmi.ras.ru, snikolenko@gmail.com
- Заходите в ЖЖ smartnik.