КОНСПЕКТ ЛЕКЦИИ 2. ДВА АУКЦИОНА И ТЕОРЕМА О ВЫЯВЛЕНИИ

СЕРГЕЙ НИКОЛЕНКО

Contents

1. Две модели аукционов

В этом разделе будут рассмотрены аукционы первой и второй цены. Для них будут найдены оптимальные стратегии поведения агентов, ожидания прибыли организаторов. Сначала определим условия, в которых проводится аукцион.

Определение 1. *Sealed-bid аукцион. Есть N независимых агентов, которые хотят купить один объект. Считается, что участники подают заявки в конвертах организаторам, которые на основании всех ставок решают, какому агенту отдать этот объект и за какую цену.*

Будем считать, что возможная внутренняя стоимость агента i определяется случайной величиной X_i, иначе говоря, агент i при многократном повторении аукциона будет иметь внутренние стоимости, подчиняющиеся распределению случайной величины X_i. Предположим также, что X_i равномерно распределена на отрезке $[0, \omega]$ и имеет неубывающую функцию распределения $F : [0, \omega] \to [0, 1]$. В принципе возможно, что $\omega = \infty$, но в любом случае $\mathbf{E}[X_i] < \infty$.

Далее предположим, что агент i знает все X_j, $j \neq i$ и знает свою ставку x_i, которую он поставит. При этом конкретные значения x_j, $j \neq i$, которые поставили другие агенты, агент i не знает.

Сделаем еще одно предположение о природе агентов. Будем считать, что все X_i имеют одну и ту же функцию распределения F, и все агенты осведомлены о

Date: 29.03.2008.

том, что у всех одинаковая функция распределения F. Такая система называется ***симметричной****.*

1.1. **Second price Sealed-bid аукцион.** Определив таким образом Sealed-bid аукцион с точки зрения агентов, обратимся теперь к самой реализации этой модели аукциона организаторами — кому отдать единственный продаваемый объект и по какой цене. Сначала рассмотрим механизм аукциона Викри (подробно описанный в первой лекции). Напомним, что если агент i подает ставку b_i, то его прибыль, исходя из механизма аукциона Викри, определяется следующим образом:

$$\Pi_i = \begin{cases} x_i - \max_{j \neq i} b_j, & \text{если } b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ 0, & \text{если } b_i < \max_{j \neq i} b_j. \end{cases}$$

Если несколько агентов подадут одинаковые ставки, то в качестве победителя аукциона выберем одного из них равновероятно.

Вспомним теорему, доказанную на первой лекции:

Теорема 1. *В second-price sealed-bid аукционе стратегия делать ставку $b_i(x) = x$ является слабо доминирующей. Здесь x — реальная внутренняя стоимость объекта для агента i.*

Напомним определение слабо доминирующей стратегии:

Определение 2. *Стратегия агента $b_i : [0, \omega] \to [0, \omega]$ называется слабо доминирующей, если она слабо максимизирует прибыль агента i при всех возможных стратегиях других агентов:*

$$\forall b'_i, B_{-i} \in \Sigma_{-i} \text{ выполнено } \Pi_i(b_i, B_{-i}) \geq \Pi_i(b'_i, B_{-i})$$

Где Σ_{-i} — множество возможных наборов стратегий остальных агентов.

Отметим, что доказательство этой теоремы не использовало ни предположений агентов друг о друге, ни симметричности аукциона.

Предложение 1. *Давайте найдем, сколько агент ожидает заплатить в результате Second Price Sealed-bid аукциона, учитывая симметричность. Рассмотрим агента* 1. *Рассмотрим первую порядковую статистику $\{X_2, X_3, \ldots, X_N\}$*

$$Y_1 = max\{X_2, X_3, \ldots, X_N\}$$

Найдем функцию распределения Y_1:

$$G(y) = \Pr(max\{X_2, X_3, \ldots\} < y) = \prod_{i=2}^{N} \Pr(X_i < y) = F(y)^{N-1}$$

Итого, если x — ставка агента 1, *то ожидание выигрыша с учетом того, что все агенты ставят свои реальные ценности будет вычисляться по следующей формуле:*

$$\begin{aligned} m(x) &= \Pr[\textit{Выигрыш агента 1}] \times \mathbf{E}[2\textit{я ставка} \mid x \textit{ — макс. ставка}] = \\ &= \Pr[\textit{Выигрыш агента 1}] \times \mathbf{E}[2\textit{я ценность} \mid x \textit{ — макс. ценность}] = \\ &= G(x)\mathbf{E}[Y_1 \mid Y_1 < x] = F(x)^{N-1}\mathbf{E}[Y_1 \mid Y_1 < x]. \end{aligned}$$

1.2. **First price Sealed-bid аукцион.** Обратимся теперь к First Price Sealed-bid аукциону. Функция прибыли агента i выглядит следующим образом:

$$\Pi_i = \begin{cases} x_i - b_i, & \text{если } b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ 0, & \text{если } b_i < \max_{j \neq i} b_j. \end{cases}$$

Если несколько агентов подадут одинаковые ставки, то в качестве победителя аукциона выберем одного из них равновероятно.

Такой аукцион не будет правдивым, так как при сообщении настоящей цены агент всегда получит прибыль 0, что эквиваленто неучастию в аукционе. Поэтому агенты должны врать, и мы рассмотрим их стратегии $\beta(x)$ — ставка агента с внутренней ценностью x. Рассмотрим свойства стратегии β:

(1) $\beta(0) = 0$ и $\forall x \in [0, \omega] : \beta(x) \leq \beta(\omega)$
(2) $\beta(x)$ — неубывающая функция

Рассмотрим первого игрока. Пускай он знает, что остальные следуют стратегии β, и он хочет определить свою ставку b с учетом внутренней полезности лота аукциона для него (x). Тогда первый агент выигрывает, когда $\max_{i \neq 1} \beta(X_i) < b$. Ввиду монотонности β получаем, что $\max_{i \neq 1} \beta(X_i) = \beta(\max_{i \neq 1} X_i) = \beta(Y_1)$. Следовательно, первый игрок выиграет, когда $Y_1 < \beta^{-1}(b)$. Тогда вероятность того, что агент выиграет, поставив b, будет равна $G(\beta^{-1}(b))$, где G — распределение Y_1. В итоге, получается, что ожидаемая прибыль, которую получит первый игрок

$$G(\beta^{-1}(b))(x - b) \tag{1}$$

Получив такую формулу для ожидаемого выигрыша, осталось максимизировать ее по b стандартным способом — продифференцировать по b и приравнять к 0. Запишем получившееся уравнение:

$$\frac{G'(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))}(x - b) - G(\beta^{-1}(b)) = 0.$$

Но мы ищем равновесную оптимальную стратегию, т.е. $b = \beta(x)$. Получим дифференциальное уравнение:

$$G(x)\beta'(x) + G'(x)\beta(x) = xg(x) \Leftrightarrow$$

$$G(x)\beta'(x) + G'(x)\beta(x) = xG'(x) \Rightarrow$$

$$\beta(x) = \frac{1}{G(x)} \int_0^x yG'(y)dy$$

Если теперь вспомнить определение условного мат. ожидания и то, что $\beta(0) = 0$, получим итоговые формулы:

$$\text{Стратегия игрока } \beta(x) = \mathbf{E}[Y_1 | Y_1 < x] \tag{2}$$

$$\text{Ожидаемая выплата игрока } m(x) = G(x)\mathbf{E}[Y_1 | Y_1 < x] \tag{3}$$

Итого, найдя вид функции β, нам осталось доказать, что это действительно равновесная стратегия. На самом деле, пока мы показали только достаточность, осталось проверить необходимость.

Теорема 2. *Стратегия*

$$\beta(x) = \mathbf{E}[Y_1|Y_1 < x]$$

действительно является равновесной в first-price sealed-bid аукционе.

Proof. Итак, пусть все кроме первого агента действуют по стратегии $\beta(x) = \frac{1}{G(x)}\int_0^x yG'(y)dy = \mathbf{E}[Y_1|Y_1 < x]$. Обозначим ставку первого игрока как b. Тогда если $b > \beta(\omega)$, первый агент получит отрицательную прибыль. Следовательно $b \leq \beta(\omega)$. Обозначим $z = \beta^{-1}(b)$ значение, для которого b — равновесная ставка. Используя формулу (1), найдем ожидаемый выигрыш первого игрока:

$$\begin{aligned}\Pi(b, x) = G(z)(x - \beta(z)) = \\ = G(z)x - G(z)\mathbf{E}[Y_1|Y_1 < z] = G(z)x - \int_0^z yg(y)dy = \\ = G(z)x - G(z)z + \int_0^z G(y)dy = G(z)(x - z) + \int_0^z G(y)dy.\end{aligned}$$

Итого:

$$\begin{aligned}\Pi(b, x) = G(z)(x - z) + \int_0^z G(y)dy \Rightarrow \\ \Pi(\beta(x), x) - \Pi(\beta(z), x) = G(x)(x - x) + \int_0^x G(y)dy - \\ G(z)(x - z) - \int_0^z G(y)dy = G(z)(z - x) - \int_x^z G(y)dy \geq 0 \quad (4)\end{aligned}$$

Последнее неравенство выполнено, так как G — неубывающая функция. В итоге, получили, что всегда выгоднее ставить $\beta(x)$ в условиях нашего аукциона, что и означает, что β — оптимальная равновесная стратегия. □

Замечание 1. *Можно переписать β в виде, в котором будет очевидно, что участникам надо ставить меньше их внутренней ценности:*

$$\beta(x) = x - \int_0^x \frac{G(y)}{G(x)}dy.$$

Proof. Докажем, проинтегрировав по частям:

$$\beta(x) = \frac{1}{G(x)}\int_0^x yG'(y)dy = \frac{xG(x) - \int_0^x G(y)dy}{G(x)} = x - \int_0^x \frac{G(y)}{G(x)}dy$$

□

Замечание 2. *Учитывая, что*

$$\beta(x) = x - \int_0^x \frac{G(y)}{G(x)}dy \quad \text{и} \quad \frac{G(y)}{G(x)} = \left(\frac{F(y)}{F(x)}\right)^{N-1}$$

получаем, что чем больше участников, тем ближе им нужно ставить к своей истинной ценности.

Замечание 3. *Предположим, что ценности распределены равномерно на* $[0,1]$ *(это значит, что* $F(x) = x$, $G(x) = x^{N-1}$*). Тогда стратегия* β *выглядит следующим образом:*

$$\beta(x) = \frac{N-1}{N}x$$

Proof. Докажем, просто проинтегрировав выражение, полученное в предыдущем замечании:

$$\beta(x) = x - \int_0^x \frac{G(y)}{G(x)}dy = x - \int_0^x \frac{y^{N-1}}{x^{N-1}} = x - \frac{x^N}{Nx^{N-1}} = \frac{N-1}{N}x$$

□

1.3. **Заработок продавца в First Price и Second Price аукционах.** Рассмотрев выше ожидаемые выплаты игроков и их стратегии в обоих аукционах, обратимся теперь к ожидаемой прибыли, которую получит продавец (обозначим ее $\mathbf{E}[\text{Revenue}]$). В Second Price аукционе продавец получает ожидаемую стоимость второго участника:

$$\mathbf{E}[\text{Revenue}] = E[Y_2]$$

Замечание 4. *Для* $E[Y_2]$ *верна следующая формула:*

$$\mathbf{E}[Y_2] = N\int_0^\omega y(1-F(y))g(y)dy.$$

Proof. В формуле просто записано, что вероятность y быть вторым максимумом — это произведение двух событий:

- одно из N чисел больше y (вероятность $1-F(y)$)
- y — является максимумом среди остальных $N-1$ чисел (вероятность $g(y)$).

При этом то, какое по номеру число является первым максимумом, можно менять — отсюда получается множитель N. □

Теперь рассмотрим First Price аукцион. Учитывая, что $m(x)$ — ожидаемая выплата одного участника, получим следующую формулу для прибыли продавца:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\text{Revenue}] &= N\int_0^w m(x)f(x)dx = &(5)\\
&= N\int_0^w \left(\int_0^x yG'(y)dy\right) f(x)dx = &(6)\\
&= N\int_0^w \left(\int_y^w f(x)dx\right) yg(y)dy = &(7)\\
&= N\int_0^\omega y(1-F(y))g(y)dy &(8)
\end{aligned}$$

Пояснения к равенствам:

- Первое равенство — переход к сумме "средних" выплат от всех участников. Напомним, что $f(x)$ — функция плотности распределения внутренних стоимостей агентов.
- Второе равенство — подставляем уже найденное нами в предыдущем пункте $m(x)$.

- Третье равенство — меняем порядок интегрирования на треугольной области интегрирования (в пространстве (x,y)). Переходим от функции распределения $G(y)$ к ее плотности — $g(y)$.
- Четвертое равенство — используем определение функции плотности вероятности случайной величины.

Оказалось, что ожидаемый доход продавца в First Price и Second Price аукционах совпадает, но при этом доход в конкретных случаях может отличаться.

Пример 1. *Рассмотрим двух участников с равномерно распределенными ценностями на* $[0,1]$. *Тогда в First Price аукционе агенты будут ставить* $b(x) = x/2$ *(показано в замечании 3), а в Second Price* $b(x) = x$ *(показано в теореме 1). Приведем два варианта скрытых ценностей, когда лучше то один аукцион, то другой:*

- *First лучше Second. Если ценность первого* 0, *а ценность второго* 1, *то First Price даст доход* 0.5 *а Second Price* 0.
- *Second лучше First. Если ценность первого и второго* 1, *то First Price даст доход* 0.5, *а Second Price* 1.

Другим словами, здесь используются следующие идеи:

- *В second-price аукционе все говорят свои настоящие ценности — но получают вещь за меньшую цену, за цену второго сверху участника.*
- *В first-price аукционе каждый платит сколько сказал — но все говорят меньше, чем истинная стоимость.*

2. Свойства механизмов и принцип выявления

2.1. Правдивые и неправдивые механизмы.

Сначала напомним определение механизма:

Определение 3. Механизм $\mathcal{M} = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N, g)$ *состоит из набора стратегий* Σ_i *для каждого агента и* функции исходов $g : \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_N \to \mathcal{O}$, *которая определяет исход, предусмотренный механизмом для данного профиля стратегий* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_N)$.

Теперь немного конкретизируем это определение, чтобы на определенном множестве механизмов получить прикладные результаты:

- У агентов вместо множеств стратегий Σ_i будет множества возможных ставок $\mathcal{B}_i$. Каждый агент должен сделать ставку $b_i \in \mathcal{B}_i$. Итого, получится вектор ставок $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_N) \in \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_N$.
- Можно конкретизировать и понятие *функции исходов*. Она разделится на две функции: *правило размещения* (π) и *правило платежей* (μ):
  - *Правило размещения* (allocation rule) $\pi : \mathcal{B} \to \Delta$ определяет, кому достанется предмет (Δ — множество распределений вероятностей над множеством агентов).
  - *Правило платежей* (payment rule) $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^N$ определяет, сколько каждый агент должен будет заплатить. $\mu_i(\mathbf{b})$ — цена, которую должен заплатить i-й агент по итогам аукциона.

Пример 2. *Тогда функции размещения и платежей в First Price аукционе будут выглядеть так:*

$$\pi_i(\mathbf{b}) = \begin{cases} 1, & \text{если } b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$\mu_i(\mathbf{b}) = \begin{cases} b_i, & \text{если } b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

а в Second Price (функция размещения у него такая же как у Second Price):

$$\mu_i(\mathbf{b}) = \begin{cases} \max_{j \neq i} b_j, & \text{если } b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

- Стратегии в этом контексте тоже немного конкретизируются; теперь стратегии — это функции $\beta_i : [0, \omega_i] \to \mathcal{B}_i$, где ω_i — максимальная возможная для i-го агента стоимость (возможно, $\omega_i = \infty$).
- Равновесие стратегий $(\beta_1, \ldots, \beta_N)$ достигается, если для каждого i и каждого x_i отклонение от стратегии β_i уменьшает ожидаемый выигрыш i-го агента:

$$\mathbf{E}[m(\beta_i'(x_i))] \leq \mathbf{E}[m(\beta_i(x_i))],$$

  где вероятность берется по распределениям X_j других агентов, придерживающихся стратегии β_j.

Теперь снова обратимся к общему определению механизма и рассмотрим один из типов механизмов — прямые механизмы (direct, direct revelation). В этом случае у каждого агента просто спрашивают его тип, т.е. $\Sigma_i = \theta_i$ (в случае аукционов — его истинную стоимость x_i). Но, как мы уже выясняли, агенты могут нам врать, поэтому мы хотим придумать такие механизмы, чтобы врать было невыгодно.

Вспомним определение того, что механизм реализует социальную функцию:

Определение 4. Механизм $\mathcal{M} = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N, g)$ реализует *функцию социального выбора $f(\theta)$, если для всех $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N) \in \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_N$*

$$g(s_1^*(\theta_1), \ldots, s_N^*(\theta_N)) = f(\theta),$$

где профиль стратегий $(s_1^*, \ldots, s_N^*)$ находится в равновесии по отношению к игре, индуцированной $\mathcal{M}$.

Добавим в это определение правдивость механизма:

Определение 5. *Прямой механизм $\mathcal{M} = (\theta_1, \ldots, \theta_N, g)$* реализует *функцию социального выбора $f(\theta)$, если для всех $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N) \in \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_N$*

$$g(\theta_1, \ldots, \theta_N) = f(\theta),$$

где профиль стратегий $(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ находится в равновесии по отношению к игре, индуцированной $\mathcal{M}$.

Учитывая, что в этом определении получилось, что $g = f$, можно определить правдиво реализуемую функцию социального выбора.

Определение 6. *Функция социального выбора $f(\theta)$* правдиво реализуема *(truthfully implementable, incentive compatible), если профиль стратегий $(s_1^*, \ldots, s_N^*)$, где $s_i^*(\theta_i) = \theta_i$, находится в равновесии в игре, индуцированной прямым механизмом $\mathcal{M} = (\theta_1, \ldots, \theta_N, f)$.*

Получив таким образом определение правдивых механизмов и, осознавая их главный плюс — участникам выгоднее говорить правду, можно задаться вопросом — а когда можно получить правдивый механизм для заданной функции социального выбора.

Ответ на этот вопрос уже есть: Майерсон доказал *принцип выявления доходности*, который гарантирует, что если какую-то социальную функцию можно реализовать, её можно и правдиво реализовать. Перед доказательством ослабленного варианта этого факта нам нужно будет вспомнить несколько определений.

Определение 7. *Стратегия s_i называется* доминантной*, если она (слабо) максимизирует ожидаемую прибыль агента для всех возможных стратегий других агентов:*

$$\forall s_i' \neq s_i, \mathbf{s}_{-i} \in \mathbf{\Sigma}_{-i} \quad u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}, \theta_i) \geq u_i(s_i', \mathbf{s}_{-i}, \theta_i).$$

Отдельно оговорим плюсы доминантных стратегий:

- Во-первых, можно быть более–менее уверенным, что агент изберет доминантную стратегию: она не зависит от его прогнозов на действия других агентов.
- Во-вторых, по этой же причине можно отказаться от предположений на распределение типов у агентов $F(\theta)$ и, вообще, $F(\theta)$ не рассматривать.

Определение 8. *Механизм $\mathcal{M} = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N, g)$ реализует функцию социального выбора* $f(\theta)$ в доминантных стратегиях*, если для всех* $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N) \in \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_N$

$$g(s_1^*(\theta_1), \ldots, s_N^*(\theta_N)) = f(\theta),$$

и каждая из стратегий s_i^* является доминантной для агента i.

Совмещая определения правдивой реализуемости и реализумости в доминантных стратегиях для функции социального выбора, получим следующее определение:

Определение 9. *Функция социального выбора $f(\theta)$* правдиво реализуема в доминантных стратегиях *(truthfully implementable in dominant strategies, dominant strategy incentive compatible, strategy-proof, straightforward), если профиль стратегий $(s_1^*, \ldots, s_N^*)$, где $s_i^*(\theta_i) = \theta_i$, находится в равновесии доминантных стратегий в игре, индуцированной прямым механизмом $\mathcal{M} = (\theta_1, \ldots, \theta_N, f)$, т.е. $\forall \theta_i, \theta_i' \in \theta_i$, $\theta_{-i} \in \times_{-i}$*

$$u_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) \geq u_i(f(\theta_i', \theta_{-i}), \theta_i).$$

Теперь мы готовы сформулировать главную теорему этой главы:

Теорема 3. *Пусть для данной социальной функции f существует механизм $\mathcal{M} = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N, g)$, который её реализует в доминантных стратегиях. Тогда f правдиво реализуема в доминантных стратегиях.*

Proof. $\mathcal{M} = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N, g)$ реализует f, значит, есть профиль стратегий $\mathbf{s}^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$, для которого $\forall \theta \ g(s_i^*(\theta)) = f(\theta)$, и $\forall i, \theta_i, s_i', \mathbf{s}_{-i}$

$$u_i(g(s_i^*(\theta_i), \mathbf{s}_{-i}), \theta_i) \geq u_i(g(s_i', \mathbf{s}_{-i}), \theta_i).$$

В частности (подставим конкретное s' и $\mathbf{s}_{-i}$), $\forall i, \theta_i$

$$u_i(g(s_i^*(\theta_i), \mathbf{s}_{-i}), \theta_i) \geq u_i(g(s_i^*(\theta_i), \mathbf{s}_{-i}^*(\theta_{-i})), \theta_i).$$

Т.к. $g(s_i^*(\theta)) = f(\theta))$ получим, что $\forall i, \theta_i$ выполнено:

$$u_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) \geq u_i(f(\theta_i', \theta_{-i}), \theta_i).$$

А это в точности определение правдивой реализуемости. Описанные уравнения можно объяснить вполне понятной конструкцией построения правдивого механизма по неправдивому:

- Итак, у нас есть неправдивый механизм $\mathcal{M}_1$, в котором агенты находятся в равновесии, но при этом врут — показывают не свои типы, а другие $s_i^*(\theta_i)$. Тогда рассмотрим новый механизм $\mathcal{M}_2$ с немного измененным протоколом — после получения значений от агентов, механизм будет их преобразовывать с помощью $s_i^*(\theta_i)$, а потом уже подставлять эти значения в функцию получения исхода.
- Кстати, точно так же можно доказать эту теорему с неправдивыми механизмами, в которых реализуемая функция находится в равновесии по Нэшу или Байесу-Нэшу. Мы будем этим пользоваться, когда будем говорить о соответствующих контекстах.

□

2.2. **Переформулировка принципа выявления доходности.** Доказав в предыдущей части такую важную теорему 3, займемся небольшой ее переформулировкой. Для этого нам понадобится вспомнить определение правдивой реализуемости:

Определение 10. *Правдивая реализуемость.* $\forall \theta_i, \theta_i' \in \theta_i$, $\theta_{-i} \in \times_{-i}$:

$$u_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) \geq u_i(f(\theta_i', \theta_{-i}), \theta_i).$$

Теперь рассмотрим агента i и любую пару возможных типов θ_i' и θ_i''. Если правдивость — доминантная стратегия, то $\forall \theta_{-i} \in \times_{-i}$ выполнено:

$$u_i(f(\theta_i', \theta_{-i}), \theta_i') \geq u_i(f(\theta_i'', \theta_{-i}), \theta_i') \text{ и}$$

$$u_i(f(\theta_i'', \theta_{-i}), \theta_i'') \geq u_i(f(\theta_i', \theta_{-i}), \theta_i'').$$

Т.е. предпочтения агента i в смысле ранжирования $f(\theta_i', \theta_{-i})$ и $f(\theta_i'', \theta_{-i})$ должны измениться, когда его тип меняется с θ' на θ'' или обратно. Это называется *свойством слабого обращения преференций* (weak preference reversal property).

Кстати, верно и обратное: если свойство слабого обращения преференций выполняется для всех $\theta_{-i} \in \times_{-i}$ и для всех пар $\theta', \theta'' \in \Theta_i$, то говорить правду — доминантная стратегия для агента i. Это легко проверяется простым фиксированием θ' в определении свойства слабого обращения преференций. Теперь введем новое определение и переформулируем теорему:

Определение 11. Множество нижнего контура *(lower contour set) возможного исхода o при агенте i типа θ_i — это*

$$L_i(o, \theta_i) = \{o' \in \mathcal{O} : u_i(o, \theta_i) \geq u_i(o', \theta_i)\}.$$

Теорема 4. Переформулировка принципа выявления доходности. *Социальная функция f правдиво реализуема в доминантных стратегиях тогда и только тогда, когда для всех i, всех $\theta_{-i} \in \times_{-i}$ и всех пар типов агента i $\theta', \theta'' \in \Theta_i$ верно*

$$f(\theta_i''\theta_{-i}) \in L_i(f(\theta_i', \theta_{-i}), \theta_i'), \quad f(\theta_i'\theta_{-i}) \in L_i(f(\theta_i'', \theta_{-i}), \theta_i'').$$

На самом деле, мы просто переформулировали факт о том, что механизм реализуем в доминантных стратегиях.

3. Теорема об эквивалентности доходности

3.1. Эквивалентность доходности с симметричными агентами. В этой части мы снова будем рассматривать аукционы. Итак, определим условия, в которых проводится аукцион:

- N покупателей, у каждого ценность x_i, которая определяется случайной величиной X_i, распределенной по $F(x)$.
- В аукционе A агент i платит $m_i^A(x_i)$.
- Есть еще $G(x) = F(x)^{N-1}$ — первый момент $N-1$ агента.
- Мы ограничимся *стандартными аукционами*, в которых вещь достается тому, кто больше всех предложил. при этом конечно, то, сколько он в действительности заплатит, зависит от формы аукциона.
- Для аукциона A и агента i введем обозначение $m_i^A(x_i)$ — сколько участник i ожидает заплатить, участвуя в A и используя равновесную стратегию (предполагается, что равновесие в A существует). Агенты у нас будут одинаковы, поэтому m^A не зависит от i. Предположим еще, что участник со ставкой 0 платит 0 (начальное условие).

Теперь мы готовы сформулировать и доказать основную теорему:

Теорема 5. *Пусть скрытые значения агентов x_i распределены независимо и одинаково, и все агенты нейтральны к риску. Тогда любое симметричное равновесие любого стандартного аукциона, такое, что ожидаемая выплата агента со ставкой 0 равна нулю, дает один и тот же ожидаемый доход продавцу.*

Proof. Рассмотрим первого агента: остальные следуют равновесной стратегии β, а он ставит $\beta(z)$, где z — неправильная внутренняя стоимость, которую использует агент, когда делает ставку по стратегии β. Он выигрывает, когда его ставка $\beta(z)$ превышает самую большую из других ставок $\beta(Y_1)$, т.е. когда $z > Y_1$. Тогда игрок ожидает получить следующую прибыль:

$$\Pi^A(z, x) = G(z)x - m^A(z)$$

где $G(z) = F(z)^{N-1}$ (распределение Y_1). Заметим, что $m^A(z)$ зависит от β и от z, но не зависит от внутренней ценности x. Логично, что нам нужно максимизировать полученную ожидаемую прибыль агента, поэтому будем диффернцировать, диффернцировать и еще раз дифференцировать. Дифференцируя выражение для ожидаемой прибыли, получим следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial z}\Pi^A(z, x) = g(z)x - \frac{d}{dz}m^A(z) = 0.$$

Так как в равновесии нужно говорить $z = x$, то получаем следующее уравнение:

$$\frac{d}{dy}m^A(y) = g(y)y,$$

Интегрируя этот диффур, получим выражение для $m^A(x)$:

$$m^A(x) = m^A(0) + \int_0^x yg(y)dy = \int_0^x yg(y)dy = G(x) \times \mathbf{E}[Y_1 | Y_1 < x].$$

Вот и получилось, что ожидаемая выплата агента не зависит от A, а только от распределения на x. Вдобавок к этому, т.к ожидаемый доход продавца складывается из ожидаемых выплат агентов, получается, что этот доход тоже не зависит от A. $\square$

Рассмотрим теперь на простом примере, как посчитать ожидаемые выплаты агентов и ожидаемую прибыль продавца:

Пример 3. *Пусть скрытые значения агентов x_i распределены равномерно на $[0,1]$. Тогда $F(x) = x$, $G(x) = x^{N-1}$, и из теоремы получается, что*

$$m^A(x) = \frac{N-1}{N}x^N,$$

$$\mathbf{E}[m^A(x)] = \frac{N-1}{N(N+1)}.$$

А ожидаемый доход продавца — это $N\mathbf{E}[m^A(x)]$:

$$\mathbf{E}[R^A] = \frac{N-1}{N+1}.$$

Во время доказательства теоремы мы получили формулу для ожидаемой выплаты агента. Запишем ее еще раз, чтобы уже точно запомнить:

$$m^A(x) = m^A(0) + \int_0^x yg(y)dy, \tag{9}$$

$$g(x) = G'(x) = (F(x)^{N-1})' = (N-1)f(x)F(x)^{N-2}.$$

Заметим, что формула действует только если равновесие в аукционе есть — это нужно проверять отдельно, а уже потом, если получилось, что равновесие есть, использовать эту формулу.

В качестве очередного примера рассмотрим еще один аукцион:

Пример 4. All-pay auction. *Данный аукцион представляет собой модель одной жизненной ситуации, лоббирования. Здесь все агенты делают ставки, потом все платят, сколько поставили, а потом вещь дают тому, кто заплатил больше. В таком аукционе ожидаемая выплата* строго равна *ставке. Поэтому если равновесие есть, оно должно быть тут:*

$$m^{\text{all-pay}}(x) = \int_0^x yg(y)dy = \beta^{\text{all-pay}}(x).$$

Проверим, что это действительно равновесие (по Нэшу хотя бы). Пусть все играют по $\beta^{\text{all-pay}}$, а один ставит z. Тогда он получит

$$G(z)x - \beta(z) = G(z)x - \int_0^z g(y)dy = G(z)(x-z) + \int_0^z G(y)dy.$$

Это мы уже видели в First Price аукционе (формула 4), следовательно, и здесь равновесие будет.

Рассмотрим теперь аукцион, при анализе которого нам потребуется немного вспомнить математическую статистику:

Пример 5. Third price auction. *Здесь все похоже на First Price и Second Price аукционы — ставишь, если поставил больше всех, выигрываешь, только платишь третью сверху ставку.*

Итак, наша магическая формула (9) говорит:

$$m^{\mathrm{III}}(x) = \int_0^x y g(y) dy.$$

Игрок выигрывает, когда $Y_1 < x$, *и платит* $\beta^{\mathrm{III}}(Y_2)$, *где* Y_2 *— вторая сверху цена из оставшихся* $N-1$ *ставок.*

Теперь на время забудем об аукционах и займемся статистикой. Найдем плотность второй порядковой статистики в выборке из n элементов.
Событие $Y_2 < y$ *— это объединение двух непересекающихся событий:*

- *все* X_k *меньше* y*;*
- $n-1$ *из* X_k *меньше* y*, а один* X_k *больше* y*.*

Следовательно, получим следующее выражение:

$$F_2^{(n)}(y) = F(y)^n + nF(y)^{n-1}(1-F(y)) = nF(y)^{n-1} - (n-1)F(y)^n \Rightarrow$$

$$f_2^{(n)}(y) = F_2^{(n)'}(y) = n(n-1)(1-F(y))F(y)^{n-2}f(y).$$

Нас еще интересуют условные вероятности. Сначала — совместная вероятность:

$$f_{\mathbf{Y}}^{(n)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = n! f(y_1) f(y_2) \ldots f(y_n).$$

Теперь построим формулу для нахождения $f_{\mathbf{Y}}^{(n)}(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ *:*

$$f_{\mathbf{Y}}^{(n)}(y_1, y_2, \ldots, y_k) = \frac{\int_{-\infty}^{y_k} \ldots \int_{-\infty}^{y_k} f_{\mathbf{Y}}^{(n)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) dy_{k+1} \ldots dy_n}{(n-k)!}$$

В знаменателе стоит $(n-k)!$, *т.к. при подсчете интегралов мы посчитаем одни и те же события* $(n-k)!$ *раз, это получается из-за того, что формула совместной вероятности не различает значения переменных* y_i*, по которым идет интегрирование, друг относительно друга.*

Теперь подставим формулу для совместной вероятности (с n переменными) и проинтегрируем, получившееся выражение:

$$\frac{\int_{-\infty}^{y_k} \ldots \int_{-\infty}^{y_k} f_{\mathbf{Y}}^{(n)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) dy_{k+1} \ldots dy_n}{(n-k)!} = \frac{\int_{-\infty}^{y_k} \ldots \int_{-\infty}^{y_k} n! f(y_1) f(y_2) \ldots f(y_n) dy_{k+1} \ldots dy_n}{(n-k)!} = \frac{n! F(y_k)^{n-k} f(y_1) f(y_2) \ldots f(y_k)}{(n-k)!}$$

Например, при $k = 2$ *мы получим следующее выражение:*

$$f_{1,2}^{(n)}(y_1, y_2) = n(n-1) f(y_1) f(y_2) F(y_2)^{n-2}.$$

Теперь получим формулу для условной вероятности:

$$f_2^{(n)}\left(z \mid Y_1^{(n)} = y\right) = \frac{f_{1,2}^{(n)}(y,z)}{f_1^{(n)}(y)} = \frac{n(n-1)f(y)f(z)F(z)^{n-2}}{nf(y)F(y)^{n-1}} =$$

$$= \frac{(n-1)f(z)F(z)^{n-2}}{F(y)^{n-1}} = \frac{f_1^{(n-1)}(z)}{F(y)^{n-1}}.$$

Найдем условную вероятность второй порядковой статистики при условии первой:

$$f_2^{(n)}\left(y \mid Y_1^{(n)} < x\right) = \frac{\int_y^x f_{1,2}^{(n)}(z,y)dz}{F_1^{(n)}(x)} = \frac{\int_y^x n(n-1)f(z)f(y)F(y)^{n-2}dz}{F_1^{(n)}(x)} =$$

$$= \frac{n(n-1)F(z)f(y)F(y)^{n-2}|_x^y}{F_1^{(n)}(x)} = \frac{n(F(x)-F(y))f_1^{(n-1)}(y)}{F_1^{(n)}(x)}$$

Получив таким образом условную вероятность второй порядковой статистики, посчитаем ожидаемую выплату:

$$m^{\mathrm{III}}(x) = F_1^{(N-1)}(x)\mathbf{E}\left[\beta^{\mathrm{III}}(Y_2) \mid Y_1 < x\right] =$$

$$= \int_0^x \beta^{\mathrm{III}}(y)(N-1)(F(x)-F(y))f_1^{(N-2)}(y)dy.$$

Приравняем это выражение к тому, что дает нам наша магическая формула 9:

$$\int_0^x \beta^{\mathrm{III}}(y)(N-1)(F(x)-F(y))f_1^{(N-2)}(y)dy = \int_0^x yg(y)dy.$$

Продифференцировав по x, получим:

$$(N-1)f(x)\int_0^x \beta^{\mathrm{III}}(y)f_1^{(N-2)}(y)dy = xg(x) \Leftrightarrow$$

$$(N-1)f(x)\int_0^x \beta^{\mathrm{III}}(y)f_1^{(N-2)}(y)dy = (N-1)xf(x)F(x)^{N-2}.$$

Т.к. $F_1^{N-2}(x) = F(x)^{N-2}$, получается:

$$\int_0^x \beta^{\mathrm{III}}(y)f_1^{(N-2)}(y)dy = xF_1^{(N-2)}(x).$$

Продифференцируем еще по x:

$$\beta^{\mathrm{III}}(x)f_1^{(N-2)}(x) = xf_1^{(N-2)}(x) + F_1^{(N-2)}(x) \Rightarrow$$

$$\beta^{\mathrm{III}}(x) = x + \frac{F_1^{(N-2)}(x)}{f_1^{(N-2)}(x)} = x + \frac{F(x)}{(N-2)f(x)}.$$

Итак, получилось итоговая формула:

$$\beta^{\mathrm{III}}(x) = x + \frac{F(x)}{(N-2)f(x)}.$$

К сожалению, это всё верно, только когда β возрастает; а для этого, как видно, надо, чтобы F/f возрастало. То есть $\ln F$ должен быть вогнутой функцией (говорят, что F log-вогнута, log-concave). Кстати, получилось, что $\beta^{\mathrm{III}}(x)$ всегда строго больше x, *а это значит, что агенту оптимально ставить* строго больше*, чем свое скрытое значение.*

3.2. **Правдивость и эквивалентность доходности.** Рассмотрим прямой механизм. В нем у участников просто спрашивают их скрытую стоимость: $\times = \mathcal{X}$, т.е. механизм можно рассматривать как два правила:

- *правило распределения* (allocation rule) $\mathbf{Q} = (Q_1(\mathbf{x}), \dots, Q_N(\mathbf{x}))$ определяет вероятность того, что агент i получит объект;
- *правило выплаты* (payment rule) $\mathbf{M} = (M_1(\mathbf{x}), \dots, M_N(\mathbf{x}))$ определяет ожидаемую выплату агента i.

тогда исходы механизма определяются так:

$$\mathcal{O} = \{(\mathbf{Q}(\mathbf{x}), \mathbf{M}(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x}\}$$

Обозначим через $q_i(z_i)$ ожидаемую доходность агента i, когда он говорит z_i, а остальные говорят правду:

$$q_i(z_i) = \int_{\mathcal{X}_{-i}} Q_i(z_i, \mathbf{x}_{-i}) f_{-i}(\mathbf{x}_{-i}) \mathbf{dx}_{-i}.$$

А через $m_i(z_i)$ — его ожидаемую выплату:

$$m_i(z_i) = \int_{\mathcal{X}_{-i}} M_i(z_i, \mathbf{x}_{-i}) f_{-i}(\mathbf{x}_{-i}) \mathbf{dx}_{-i}.$$

Тогда ожидаемый доход агента i, если он говорит z_i, получается как

$$q_i(z_i)x_i - m_i(z_i).$$

Теперь можно определить правдивость механизма в рассматриваемом контексте:

Определение 12. *Прямой механизм* $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ *называется* правдивым *(в этом контексте — incentive compatible), если* $\forall i \ \forall x_i, z_i$

$$U_i(x_i) = q_i(x_i)x_i - m_i(x_i) \geq q_i(z_i)x_i - m_i(z_i).$$

$U_i(x_i)$ *называется* равновесной функцией дохода.

Рассмотрим несколько свойств правдивых прямых механизмов:

- *Выпуклость.* U_i выпукла, как максимум аффинных функций:

$$U_i(x_i) = \max_{z_i} \{q_i(z_i)x_i - m_i(z_i)\}.$$

- *Неубывание* q_i.

$$q_i(x_i)z_i - m_i(x_i) = U_i(x_i) + q_i(x_i)(z_i - x_i), \text{ значит,}$$

$$U_i(z_i) \geq U_i(x_i) + q_i(x_i)(z_i - x_i).$$

  Выпуклая функция абсолютно непрерывна и, следовательно, дифференцируема почти всюду в своей области определения. Значит, $U_i'(x_i) = q_i(x_i)$ почти всюду. А т.к. U_i выпуклая, то, значит, q_i не убывает. Иначе говоря, если больше предложите, вероятность получить вещь не уменьшится.

- *Независимость от правила выплаты.* Поскольку абсолютно непрерывная функция представляет собой интеграл от своей производной:

$$U_i(x_i) = U_i(0) + \int_0^{x_i} q_i(t_i)dt_i.$$

Мы получили, что форма ожидаемого дохода агента зависит только от правила распределения, но не от правила выплаты. Правило же выплаты определяет только $U_i(0)$ (это называется payoff equivalence).
- *Неубывание $q_i \Rightarrow$ правдивость механизма.*

$$U_i(z_i) \geq U_i(x_i) + q_i(x_i)(z_i - x_i),$$
$$U_i(x_i) = U_i(0) + \int_0^{x_i} q_i(t_i)dt_i, \text{ значит,}$$
$$\int_{x_i}^{z_i} q_i(t_i)dt_i \geq q_i(x_i)(z_i - x_i).$$

Итого, если q_i не убывает, то это неравенство верно. Получилось, что из неубывания q_i, следует правдивость механизма.

Итак, обобщая вышесказанное и вспоминая, что $U_i(x) = q_i(x_i)x_i - m_i(x_i)$ и $U_i(0) = -m_i(0)$ сформулируем теорему:

Теорема 6. Revenue equivalence theorem. *Если прямой механизм* $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ *правдив, то для всех i и x_i ожидаемая выплата равна*

$$m_i(x_i) = m_i(0) + q_i(x_i)x_i - \int_0^{x_i} q_i(t_i)dt_i,$$

и это означает, что ожидаемая выплата агента с точностью до константы зависит только от правила распределения.

Это обобщает наш предыдущий результат (теорема 5) — теперь агенты могут быть несимметричными, и правила распределения тоже могут различаться. Предыдущая теорема получается как частный случай, потому что если агенты симметричны, есть неубывающая равновесная стратегия, и объект распределяется покупателю с наивысшей ставкой, то правила распределения у них у всех совпадают (зависят только от распределения F).