Комбинаторные аукционы
Лекция № 7 курса
«Теория экономических механизмов»

Сергей Николенко[*]

24 марта 2008 г.

Содержание

1. Постановка задачи

В данной лекции, входящей в состав курса «Теория экономических механизмов», рассмотрен алгоритм, являющийся обобщением аукциона Викри на случай нескольких вещей. Напомним суть задачи дизайна аукциона. Аукцион — это игра, в которой участвуют агенты, стремящиеся приобрести лот по минимальной цене. У каждого агента i есть своя внутренняя цена x_i, определяющая для него ценность лота. Исход игры означает какую-либо прибыль, то есть разницу между заплаченной им ценой p и внутренней ценой x_i. Задачей агента является максимизировать свою прибыль.

1.1. Четыре свойства хорошего аукциона

Известным «хорошим» решением задачи про аукционы является аукцион Викри второй цены. Напомним его суть. Аукцион Викри — это аукцион, проводящийся по схеме sealed-bid. Участники подают свои заявки в конвертах, потом их вскрывают и выставленный на продажу объект передается тому, кто предложил самую высокую цену. Аукцион Викри второй цены продает лот по стоимости, которую предложил второй сверху участник.

Чем хорош этот тип аукционов? Во-первых, его важным свойством является правдивость (truthfulness) — каждому участнику аукциона выгодно говорить правду. Другое немаловажное свойство: аукцион Викри рационален. Рациональным называется аукцион, в котором доход каждого агента больше либо равен нуля. В случае аукциона Викри каждый участник либо получит вещь по указанной им цене, либо останется при своих деньгах.

Очень важная деталь с практической точки зрения аукциона Викри — его оптимальность: аукцион можно реализовать за полиномиальное время. Также он работает с любыми ценностями: аукцион Викри

[*]Законспектировали Денис Кулагин, Глеб Рыбаков, Алексей Суслов.

не делает предположений о внутренних ценах x_i. Личные ценности могут быть любыми, даже неограниченными сверху.

Аукцион Викри является эффективным. Эффективность аукциона — свойство максимизировать суммарную выгоду всех агентов. Пусть d_i — часть лота, которую мы продаем агенту i. $\sum_{i=1}^{N} d_i = 1$. Тогда эффективный аукцион максимизирует $\sum_{i=1}^{N}(d_i * x_i)$. Если мы продаем лишь одну вещь, то это просто означает отдать ее тому, кому она нужнее всех. Аукцион Викри именно так и делает.

Таким образом, аукцион Викри отвечает четырем свойствам «хорошего» аукциона:

1. правдивость и рациональность;
2. эффективность;
3. работа с любыми ценностями x_i;
4. возможность реализовать за полиномиальное время.

В предыдущих лекциях мы рассматривали аукционы с одной вещью. Попробуем обобщить аукцион Викри на случай нескольких вещей. В ходе лекции станет ясно, что сразу удовлетворить все четыре свойства уже не удастся.

1.2. Комбинаторные аукционы

Итак, мы хотим обобщить аукцион Викри, отвечающий четырем свойствам «хорошего» аукциона, на случай одновременной продажи нескольких вещей. Конечно, в этом случае можно продавать все вещи по одной, но этот подход работает только в том случае, когда вещи являются независимыми. Такое верно не всегда. А именно, вещи могут быть как взаимозаменяемыми (substitutes), так и взаимодополняющими (complements). Приведем некоторые примеры:

1. Для случая взаимозаменяемых вещей примеры известны: например, продажа газированного напитка вроде Coca-Cola. В ходе постоянных акций, проводимых компанией или магазинами, можно обратить внимание, что две бутылки продукта довольно часто вместе стоят дешевле, нежели по отдельности. Это связано с тем, что внутренняя цена второй бутылки в комплекте ниже, чем цена отдельной бутылки, так как товары взаимозаменяемы.

2. Неочевидным реальным примером являются окна взлета и посадки в аэропортах. С одной стороны, окна взлета в одном аэропорту примерно в одно время являются взаимозаменяемыми, так как самолету относительно не важно, с какой полосы взлетать, сейчас или через десять минут. С другой стороны, взлет в одном аэропорту и посадка в другом через заданное время являются complements. Поэтому аэропортам выгодно продавать эти слоты авиалиниям посредством аукционов.

Опишем это отношение между вещами более формально. Пусть у нас есть множество S продаваемых вещей. Тогда внутренняя ценность (valuation) v_i для каждого игрока i есть в данном случае функция из множества 2^s в вещественные числа, что позволяет для каждого игрока определить внутреннюю ценность любого подмножества всех вещей. При этом разумными являются следующие предположения о свойствах этой функции:

1. $v_i(\emptyset) = 0$;
2. $v_i(S_1) \leq v_i(S_2)$, если $S_1 \subseteq S_2$ (монотонность).

Отметим немаловажный факт: в комбинаторном аукционе может быть несколько победителей. А именно, каждому победителю может достаться некоторый комплект вещей, обладающий для него большей ценностью, чем для других. Таким образом, одним продадут одно подмножество товаров, другим другое. Но, так или иначе, польза для каждого игрока по прежнему равна $p_i = v_i(T_i)$, где T_i есть множество проданных игроку вещей. Поскольку алгоритм аукциона должен быть эффективным, он должен максимизировать суммарную ценность всех приобритенных подмножеств:

$$\sum_{i=1}^{N} v_i(T_i).$$

1.3. Аукционы Vickrey-Clarke-Groves

Обратимся к более общей конструкции аукциона, которая была рассмотрена в предыдущих лекциях. Она обладала большим количество «хороших» свойств. Это аукцион Vickrey-Clarke-Groves. Как он будет выглядеть в комбинаторном случае? Рассмотрим общую структуру аукциона в данном случае:

1. Каждый игрок i для каждого подмножества вещей T, входящего в S подает свою ставку $b_i(T)$, отвечающую внутренней ценности этих вещей для него.

2. После этого центр выбирает такое размещение вещей $(T_1^*, ..., T_N^*)$, которое максимизирует $\sum_{i=1}^N b_i(T_i)$ по всем допустимым размещениям (т.е. там, где $T_i \cap T_j = \emptyset$). И берет с каждого участника соответствующую цену p_i.

При этом аукцион VCG является эффективным и работает с любыми ценностями v_i, а цена, взятая с игрока i - это суммарный ущерб, понесенный другими игроками от присутствия i:

$$p_i = (\max_{\{T_j\}_{j \neq 1}} \sum_{j \neq i} b_j(T_j)) - \sum_{j \neq i} b_j(T_j^*),$$

т.е. разница между общим счастьем в оптимальном размещении без i и нынешним общим счастьем других игроков. Также VCG является правдивым и рациональным. Но к сожалению он не удовлетворяет свойству вычислительной эффективности.

Первое - каждый игрок должен подать ставки на каждое подмножество множества S, таким образом предоставить 2^M чисел, если в аукционе M предметов. Второе, максимизация по всем размещениям также непростая задача. Нам же нужен полиномиальный алгоритм от M и от N.

2. Полиномиальные аукционы

Третье условие, которым должны удовлетворять хорошие аукционы — работа алгоритма с любыми ценностями x_i. Оставить его в общем виде мы не можем, так как в этом случае полиномиальных аукционов не найти (ранее было доказано, что VCG единственны в своем роде, то есть все остальные им эквивалентны). С другой стороны, если его максимально ослабить, то есть позволить агентам иметь только отдельные ценности на каждую вещь, то в этом случае полиномиальный аукцион уже известен: запускаем аукцион Викри поочерёдно для каждой вещи.

Чтобы найти золотую середину, нам придется ослабить этот аукцион, но не совсем.

2.1. Целеустремленные агенты

Целеустремленные агенты (*англ. single-minded buyers*) хотят один конкретный набор вещей. Т.о. у каждого агента i есть подмножество множества вещей $A_i \subseteq S$ и число α_i. Ценность для i-го агента определяется как:

$$v_i(T_i) = \begin{cases} \alpha_i, T_i \supseteq A_i, \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

То есть агент просто хочет набор A_i. Тем не менее, такое ослабление позволяет моделировать взаимодополняющие вещи (complements). В то же время, такое ослабление позволяет агенту за полиномиальное время полностью рассказать информацию о себе. Ему достаточно задать A_i и α_i.

Возникает вопрос, возможно ли сделать полиномиальный "хороший" аукцион для целеустремленных агентов. Выше было показано, что ставки можно сделать за полиномиальное время. Следующий шаг - определение победителя (winner determination, WD).

Покажем, что задача WD для VCG, даже с целеустремленными агентами NP-трудна. Для этого сведем к задаче определения победителя другую задачу - WIS (**W**eighted **I**ndependent **S**et).

Сформулируем задачу WIS: пусть дан граф $G = (V, E)$, и для каждой вершины v задан вес w_v. Требуется найти множество вершин, в котором нет соседей и для которого максимизируется суммарный вес $\sum_i v_i$.

Эта задача легко сводится к задаче определения победителя в VCG. Для этого рассмотрим множество вещей, равное множеству ребер E и множество игроков равное множеству вершин V.

Для каждой вершины v графа G: A_v - множество соседей v (множество инцидентных ей ребер), $\alpha_v = w_v$. Тогда максимизируя размещение, мы тем самым найдем максимальный набор независимых вершин. И действительно, если две вершины соединены ребром, то они не могут быть размещены, т.к. у них есть пересечение по какой-то вещи.

WIS является NP-трудной задачей, более того её нельзя даже приблизить полиномиальными алгоритмами. Т.о., если $NP \nsubseteq ZPP$, то для всякого $\epsilon > 0$ не существует $O(n^{1-\epsilon})$-приближенного алгоритма для WIS, где n - число вершин в графе. Т.е. полученное приближенное решение будет не менее, чем в n раз хуже, чем оптимальное решение.

Следствие. Для всякого $\epsilon > 0$ не существует $O(M^{\frac{1}{2}-\epsilon})$-оптимального алгоритма для WD, где M количество вещей (количество ребер для WIS). Другими словами, даже самый лучший полиномиальный алгоритм сможет распределить не лучше, чем в $O(\sqrt{M})$ раз хуже оптимума.

2.2. Приближенный алгоритм для WD

Построим аукцион, который будет правдивым, рациональным, полиномиальным, работает с целеустремленными агентами и распределяет $O(\sqrt{M})$-близко к оптимуму.

Для начала решим задачу распределения. По $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_N, \alpha_N)$ требуется определить размещение, которое максимизирует суммарную ценность $\sum_{i \in I} \alpha_i$.

Алгоритм, который мы будем строить является жадным и представляет собой комбинацию двух алгоритмов, каждого из которых не достаточно для решения задачи.

Первый алгоритм. Отсортируем ставки по уменьшению α_i и будем жадно их удовлетворять. Можно привести тривиальный контрпример, когда наилучшее приближение будет аппроксимироваться с константой $O(M)$, а не $O(\sqrt{M})$. Допустим один человек готов заплатить 1000р. за все вещи, а остальные по 999р. за каждую вещь в отдельности. Формально это можно записать следующим образом. Рассмотрим M вещей $S = s_1, \dots, s_M$ и $N = M + 1$ игрока. $A_1 = S, \alpha_1 = 1 + \epsilon$; для $i > 1 : A_i = s_i, \alpha_i = 1$. Получается $1 + \epsilon$ вместо M, что $O(M)$-плохо. Проблема этого подхода в том, что алгоритм берёт большие заявки, не сравнивая их с суммой маленьких.

Второй алгоритм. Отсортируем ставки в порядке убывания стоимости одной вещи $\frac{\alpha_i}{|A_i|}$ и, дальше опять будем действовать жадно. Этот алгоритм успешно справиться с контрпримером, описанным выше. Тем не менее для него тоже можно привести плохой случай. Пусть $A_1 = S, \alpha_1 = M - \epsilon; A_2 = s1, \alpha_2 = 1$. В этом случае наш алгоритм выберет A_2, а на A_1 вещей не хватит. Проблема этого подхода в том, что алгоритм недооценивает большие ставки, если они включают в себя много вещей, на которые нет других заявок.

Приведем пример, когда этот алгоритм будет в $O(\sqrt{M})$ раз хуже оптимума. Рассмотрим M вещей $S = s_1, \dots, s_M$ и $N = M + 1$ игрока. $A_1 = S, \alpha_1 = 1 + \epsilon$; для $i > 1 : A_i = s_i, \alpha_i = \frac{1}{\sqrt{M}}$. Получается $1 + \epsilon$ вместо $\sqrt{M}$, что $O(\sqrt{M})$-плохо.

Алгоритм LOS (Lehmann, O'Callaghan, Shoham). Отсортируем ставки в порядке убывания $\frac{\alpha_i}{\sqrt{|A_i|}}$ и будем их жадно удовлетворять. Докажем, что этот алгоритм является $O(\sqrt{M})$-приближённым.

Обозначим через X множество ставок, которые выберет LOS, а через X^* - оптимальное множество. Требуется доказать, что

$$\sum_{i^* \in X^*} \alpha_{i^*} \leq \sqrt{m} \sum_{i \in X} \alpha_i$$

Ставка $i \in X$ блокирует ставку $i^* \in X^*$, если A_i пересекается A_{i^*} (в том числе любая ставка блокирует саму себя). Если i блокирует i^* и $i \neq i^*$, то обе ставки одновременно удовлетворить не получится. Когда мы рассматриваем некоторую ставку $i \in X$, она блокирует одну или несколько ставок из оптимального размещения. Обозначим через $F_i \subseteq X^*$ множество ставок, которые впервые заблокированы ставкой $i \in X$.

Если $i^* \in F_i$, то к моменту выбора i ставка i^* ещё не была заблокирована, т.е. для $\forall i^* \in F_i$:

$$\frac{\alpha_i}{\sqrt{|A_i|}} \geq \frac{\alpha_{i^*}}{\sqrt{|A_{i^*}|}}.$$

Кроме того, каждая i^* лежит ровно в одном F_i (сама i тоже лежит в F_i). Иначе говоря, F_i - это разбиение (partition) множества X^*. В частности, можно записать:

$$\sum_{i^* \in X^*} \alpha_i^* = \sum_{i \in X} \sum_{i^* \in F_i} \alpha_i^*.$$

Это верно, т.к. все F_i попарно не пересекаются и покрывают всё X^*. Рассмотрим каждую ставку $i \in X$ по отдельности и докажем, что для неё имеет место оценка $O(\sqrt{M})$.

Рассмотрим $i \in X$. Известно, что $\frac{\alpha_i}{\sqrt{|A_i|}} \geq \frac{\alpha_{i^*}}{\sqrt{|A_{i^*}|}}$ для любого $i^* \in F_i$. Можно просуммировать по $i^* \in F_i$:

$$\sum_{i^* \in F_i} \alpha_i^* \leq \frac{\alpha_i}{\sqrt{|A_i|}} (\sum_{i^* \in F_i} \sqrt{|A_{i^*}|}).$$

Поскольку оптимальное решение удовлетворяет всем ставкам из $F_i, \sum_{i^* \in F_i} |A_{i^*}| \leq M$.

Воспользуемся следующим соотношением, которое можно легко проверить возведением обоих частей в квадрат или воспользовавшись неравенством Йенсена для функции $\sqrt{x}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i}.$$

Получаем, что

$$\sum_{i^* \in F_i} \alpha_i^* \leq \frac{\alpha_i}{\sqrt{|A_i|}} \sqrt{|F_i|} \sqrt{M}.$$

Но поскольку ставка i блокирует все ставки F_i, и ставки в F_i не пересекаются (они все из одного оптимального набора), то в худшем случае как минимум одна вещь из i блокирует одну ставку из F_i, т.е. $|F_i| \leq |A_i|$. Значит,

$$\sqrt{\frac{|F_i|}{|A_i|}} \leq 1 \Rightarrow \sum_{i^* \in F_i} \alpha_i^* \leq \alpha_i \sqrt{M}.$$

Суммируя по $i \in X$ получаем:

$$\sum_{i \in X} \sum_{i^* \in F_i} \alpha_i^* \leq \sum_{i \in X} \alpha_i \sqrt{M} \Longleftrightarrow \sum_{i^* \in X^*} \alpha_i^* \leq \sum_{i \in X} \alpha_i \sqrt{M}$$

Т.о. мы построили $\sqrt{M}$-приближённый алгоритм поиска эффективного распеделения. Теперь нужно определить выплаты таким образом, чтобы аукцион стал правдивым.

Разумно использовать VCG. Сначала все говорят A_i и α_i, потом мы определяем распределение, используя LOS, а потом игрок i платит цену, равную ущербу других игроков от его присутствия. Будет ли такой аукцион правдивым и рациональным.

Рассмотрим M вещей $S = s_1, \ldots, s_M$ и $N = M+1$ игрока. $A_1 = S, \alpha_1 = \sqrt{M}+\epsilon$. Для $i > 1 : A_i = s_i, \alpha_i = 1$. LOS удовлетворит первую ставку, а остальные не будут удовлетворены. Т.о. первый игрок заплатит

$M - \sqrt{M} - \epsilon$, а поставил он $\sqrt{M} + \epsilon$. Т.о. его участие получается нерациональным. А следовательно, ему выгоднее соврать и поставить 0 и получить доход 0. Т.о. правдивости тоже не будет.

Придется модифицировать выплаты.

Определение. Ставка i *уникально блокирует* (u-blocks) ставку j, если после удаления i из входа, LOS удовлетворяет j, а так - вместо j удовлетворяет i. Введем ценовую политику: брать столько, сколько была наивысшая ставка, которую выигравшая ставка уникально блокирует. Это отдалённо напоминает аукцион второй цены. Формально это можно записать следующим образом:

- Если агент проигрывает или его ставка никого уникально не блокирует, то агент платит 0.
- Если агент выигрывает, и по порядку LOS ставка (B_j, b_j) является первой ставкой, которую его ставка (B_i, b_i) уникально блокирует, то берем

$$p_i = \frac{b_j}{\sqrt{|B_j|}} \sqrt{|B_i|}.$$

Покажем, что такой аукцион будет рациональным. Действительно, если (B_i, b_i) уникально блокирует (B_j, b_j), то (B_j, b_j) идет позже по LOS-порядку. Следовательно,

$$\frac{b_i}{\sqrt{|B_i|}} \geq \frac{b_j}{\sqrt{|B_j|}}$$

и, следовательно, $b_i \geq p_i$.

Правдивость доказывается немного сложнее. Покажем, что если агент что-то выигрывает от ложной ставки (B_i, b_i), то он выиграет не меньше от наполовину правдивой ставки (A_i, b_i). Будем считать, что $A_i \neq B_i$.

Во первых, $B_i \supset A_i$, иначе у i никогда не будет положительного дохода, т.к. его внутренняя ценность в этом случае не превысит нуля. Следовательно, по LOS порядку (A_i, b_i) идет раньше, чем (B_i, b_i). Получается, если LOS удовлетворил B_i, то он также удовлетворил бы и A_i, т.к. A_i является строгим подмножеством и идёт раньше по порядку.

Если заменить B_i на A_i, то уменьшается корень из размера множества ($\sqrt{|A_i|} < \sqrt{|B_i|}$). Во-вторых, может измениться первая уникально блокируемая ставка (например, на (B_k, b_k)).

Покажем, что по LOS порядку (B_k, b_k) может идти только после (B_j, b_j), т.е. можно только уменьшить первый сомножитель цены p_i.

$$B_i \cap B_j \neq \emptyset, B_i \supset A_i, A_i \cap B_k \neq \emptyset$$

Предположим, что по LOS порядку (B_j, b_j) идёт после (B_k, b_k). Следовательно $B_j \cap B_k = \emptyset$. Получаем противоречие, т.к. в этом случае $A_i \cap B_k = \emptyset$.

Мы доказали, что бессмысленно врать множество. Докажем, что не имеет смысла скрывать внутреннюю ценность. Предположим, что от (A_i, b_i) дохода больше, чем от (A_i, α_i). Обозначим B_{-i} набор остальных ставок, $B_T = B_{-i} \cup (A_i, \alpha_i), B_F = B_{-i} \cup (A_i, b_i)$. Можно предполагать, что LOS удовлетворяет ложную ставку (A_i, b_i) на входе B_F, т.к. если бы он не удовлетворял, то дохода бы не было вообще.

Первый случай: $b_i < \alpha_i$. (A_i, b_i) удовлетворена, а (A_i, α_i) идёт раньше. Значит её бы тоже удовлетворили. Пусть (B_j, b_j) - первая ставка, уникально блокированная ставкой (A_i, b_i). Покажем, что (A_i, α_i) не уникально блокирует ставки, которые идут до (B_j, b_j).

Пусть, напротив, первая уникально блокированная ставка (B_k, b_k) предшествует (B_j, b_j) в LOS порядке. По определению понятия «уникально блокирует», LOS на входе B_{-i} удовлетворяет (B_k, b_k). Но, если (A_i, b_i) идёт после (B_k, b_k) в LOS-порядке, то (B_k, b_k) удовлетворяется в том числе на входе B_F (т.к. LOS принимает одни и те же решения вплоть до появления (A_i, b_i)). Но A_i и B_k пересекаются (т.к. B_k - первая уникально блокированная ставка). К тому же (A_i, b_i) удовлетворяется LOS'ом на входе B_F. Следовательно, в LOS порядке (A_i, b_i) идёт раньше, иначе её не смогли бы удовлетворить, т.к. уже удовлетворили (B_k, b_k).

Выходит, что (A_i, b_i) блокирует (B_k, b_k), но это противоречит тому, что (B_i, b_k) предшествует первой заблокированной ставке (B_j, b_j).

Получается, что цену врать тоже не в наших интересах. Т.о. аукцион правдивый.

Случай, когда $b_i > \alpha_i$ разбирается аналогично.