Теорема Робертса
Лекция 12 курса
«Теория экономических механизмов »

Сергей Николенко *

19 мая 2008 г.

Содержание

*Законспектировали Илья Варвалюк, Антон Иринев и Виктор Каширин.

1 Аффинные максимизаторы

1.1 Суть Задачи

Мы всё время говорим о том, как бы нам реализовать ту или иную функцию социального выбора, т.е. как построить механизм, который добивается нужного результата. Можно сказать, что в этом одна из основных задач дизайна экономических механизмов.

Для функций ценности самого общего вида мы уже говорили о теореме Гиббарда-Саттертуэйта. Мы доказывали, что если допустить любые порядки на множестве возможных исходов, то реализовать можно только функции социального выбора, выгодные ровно одному участнику. Но вполне разумно было бы задать тот же вопрос для квазилинейных предпочтений. Однако стоит заметить, что в общем случае ответа на этот вопрос нет, и в данной лекции мы рассмотрим только частный случай решения этой задачи.

1.2 Определения и обозначения

У механизма есть набор исходов $\mathcal{O}$ (их мы будем обозначать через $x, y, z, \ldots$). Есть N игроков, у каждого есть свой тип v_i. Этот тип - просто набор ценностей, которые игрок может присвоить каждому исходу. Т.е. если брать ситуацию аукциона, набор исходов $\mathcal{O}$ - это кому дали вещь, а тип v_i-тое - это набор чисел, которые равны нулю если эту вещь отдали кому-то другому, или самой ценности, если вещь дали данному игроку.

Мы будем называть множество типов неограниченным, если каждый агент теоретически может присвоить каждому исходу любое вещественное число

Определение 1 $\mathbf{V} = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_N$ *называется* неограниченным, *если* $V_i = \mathbb{R}^{|\mathcal{O}|}$ *для каждого* i.

Наш случай — неограниченное $\mathbf{V}$, т.е. ситуация, в которой каждый набор из $|\mathcal{O}|$ чисел представляет собой возможный тип игрока i.

Следующий объект, который нас интересует, это функция социального выбора $f : \mathbf{V} \to \mathcal{O}$. Можно без потери общности предположить, что f сюръективна.

Кроме того, механизм берёт с игроков платежи $p_i : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ и игроки квазилинейны, т.е. они хотят максимизировать себе

$$u_i = v_i(f(\mathbf{v})) - p_i(\mathbf{v}).$$

Определение 2 *f правдиво реализуема, если существуют функции платежа p_i, для которых правдивость будет доминантной стратегией.*

От нас зависит только p_i, поэтому нам нужно так подобрать значения p_i, чтобы в конце концов эгоистичные агенты, действуя для максимизации своих u_i (которые у них квазилинейные), максимизировали f.

Формально говоря, для каждого i, каждого $\mathbf{v}_{-i} \in \mathbf{V}_{-i}$ и для каждого $v' \in V_i$, доходность, которую получит агент сказав правду? больше доходности, которую получит агент солгав:

$$v_i(f(\mathbf{v})) - p_i(\mathbf{v}) \geq v_i(f(v'_i, \mathbf{v}_{-i})) - p_i(v'_i, \mathbf{v}_{-i}).$$

Пару лекций назад мы уже говорили, что все функции социального выбора, оптимизирующие всеобщее счастье, правдиво реализуемы VCG-платежами (т.е. функция социального выбора, которая оптимизирует всеобщее счастье – она одна, реализуема посредством VCG-механизма). Более того, так же реализуемы и взвешенные функции социального выбора. А именно функции, которые с разными весами учитывают счастье разных агентов.

Задача в том, чтобы доказать обратное утверждение:

Теорема 1 (Теорема Робертса) *Пусть* $|\mathcal{O}| \geq 3$, *и* $\mathbf{V}$ *неограничено. Тогда для каждой правдиво реализуемой функции социального выбора* f *существуют неотрицательные веса* $k_1, \ldots, k_N$, *не все равные нулю, и константы* C_x, $x \in \mathcal{O}$, *для которых для всех* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$

$$f(\mathbf{v}) \in \mathrm{argmax}_{x \in \mathcal{O}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i v_i(x) + C_x \right\}.$$

1.3 Условия монотонности

Доказательства теоремы Робертса (их несколько) основаны на условиях монотонности, т.е. на том, что для правдивой реализуемости f должна удовлетворять этим условиям. Сформулируем несколько таких условий.

Определение 3 *W-MON — слабая монотонность.* f *удовлетворяет W-MON, если для всех* $v_i, v_i', \mathbf{v}_{-i}$ *при* $f(\mathbf{v}) = x$ *и* $f(v_i', \mathbf{v}_{-i}) = y$

$$v_i'(y) - v_i(y) \geq v_i'(x) - v_i(x).$$

Иначе говоря, если игрок i может изменить свой тип с v_i на v_i', при этом изменив исход с x на y, то разность его значений для y должна быть не меньше, чем разность его значений для x. Таким образом здесь появляются разности, которые будут ключевыми объектами в дальнейших рассуждениях. Стоит также заметить, что разности нужно использовать из-за квазилинейности.

Лемма 1 *Всякая доминантно реализуемая функция социального выбора* f *удовлетворяет W-MON.*

Доказательство Во-первых, докажем, что p_i не зависит от v_i. Другими словами, если функция правдиво реализуется механизмом, то функция платежа уже не зависит от ставки. Пусть зависит. Что значит, что функция платежа зависит от ставки? Это значит, что есть $\mathbf{v}_{-i}$, x, v_i, v_i' такие, что исход один и тот же, но платеж при этом разный:

$$f(v_i, \mathbf{v}_{-i}) = f(v_i', \mathbf{v}_{-i}) = x, \quad p_i(v_i, \mathbf{v}_{-i}) < p_i(v_i', \mathbf{v}_{-i}).$$

Тогда очевидно, что при типах $\mathbf{v}$ игроку i выгодно соврать. Зафиксируем $\mathbf{v}_{-i}, v_i, v_i', x, y$ так, как было в определении W-MON. Из-за правдивой реализуемости должно быть верно, что

$$v_i(x) - p_i(x, \mathbf{v}_{-i}) \geq v_i(y) - p_i(y, \mathbf{v}_{-i}),$$

иначе при типе v_i игрок i сможет улучшить себе доход, соврав v_i'. Аналогично,

$$v_i'(y) - p_i(y, \mathbf{v}_{-i}) \geq v_i'(x) - p_i(x, \mathbf{v}_{-i}).$$

Сложив эти два неравенства и сократив p_i получим искомое условие W-MON. Таким образом, W-MON необходимо.

Но для доказательства, которое мы используем в данной лекции, больше подходит условие PAD — Positive Association of Differences.

Определение 4 *Говорят, что* f *удовлетворяет PAD, если для всех* $v, v' \in V$ *верно следующее: если* $f(v) = x$, *и* $v_i'(x) - v_i(x) > v_i'(y) - v_i(y)$ *для всех* $y \in \mathcal{O} \setminus x$ *и всех* i, *то* $f(v')$ *тоже равно* x.

PAD тоже рассматривает разности, и оно легко следует из W-MON.

Лемма 2 *Всякая доминантно реализуемая функция социального выбора* f *удовлетворяет PAD.*

Доказательство Мы уже доказали, что она удовлетворяет W-MON. Теперь зафиксируем v, v' из определения PAD. Как мы уже неоднократно делали, введём промежуточные векторы типов (т.е. будем по одному менять тип) и докажем по индукции, что на каждом шаге тип сохраняется:

$$v^i = (v'_1, \ldots, v'_i, v_{i+1}, \ldots, v_N).$$

Тогда

$$f(v^0) = x, v^0 = v, v^N = v'.$$

Пусть $f(v^{i-1}) = x$, а $f(v^i) = y \neq x$. Тогда можно применить W-MON:

$$v'_i(y) - v_i(y) \geq v'_i(x) - v_i(x),$$

что противоречит предположению PAD. Значит, $f(v^i) = x$. Доказано по индукции.

И в ещё одной форме мы будем пользоваться PAD. Рассмотрим два вектора $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$. Будем обозначать $\alpha > \beta$, когда имеет место строгое неравенство в каждой компоненте. Также, обозначим $\vec{0}$ нулевой вектор.

Лемма 3 *Пусть f удовлетворяет PAD. Зафиксируем $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbf{V}$. Если $f(\mathbf{v}') = x$, и $\mathbf{v}'(y) - \mathbf{v}(y) > \mathbf{v}'(x) - \mathbf{v}(x)$, для некоторого исхода $y \in \mathcal{O}$, то $f(\mathbf{v}) \neq y$.*

Доказательство Так как имеет место строгое неравенство, следовательно есть такое $\Delta > \vec{0}$, равное разности двух векторов из исходного неравенства:

$$\Delta = \mathbf{v}'(y) - \mathbf{v}(y) + \mathbf{v}(x) - \mathbf{v}'(x) \in \mathbb{R}^N.$$

Кроме того,

$$v_i(x) - v'_i(x) - \frac{\Delta_i}{2} = v_i(y) - v'_i(y) + \frac{\Delta_i}{2} > v_i(y) - v'_i(y).$$

Определим новый тип $\mathbf{v}'' \in \mathbf{V}$:

$$v''_i(z) = \begin{cases} \min\{v_i(z), v'_i(z) + v_i(x) - v'_i(x)\} - \Delta_i, & z \neq x, y, \\ v_i(x) - \frac{\Delta_i}{2}, & z = x, \\ v_i(y), & z = y. \end{cases}$$

Это сугубо техническая конструкция, которая нужна для того, чтобы из PAD следовало сразу две вещи: $f(\mathbf{v}'') = y$ и $f(\mathbf{v}'') = x$. Таким образом, с одной стороны получаем, что

$$v''_i(y) - v_i(y) = 0 > v''_i(z) - v_i(z),$$

и из PAD следует, что $f(\mathbf{v}'') = y$.

С другой стороны, для $z \neq x, y$

$$v''_i(z) \leq v'_i(z) + v_i(x) - v'_i(x) - \Delta_i,$$

и

$$v''_i(x) - v'_i(x) = v_i(x) - v'_i(x) - \frac{\Delta_i}{2} > v''_i(z) - v'_i(z).$$

Анналогично для $z = y$. Тогда из PAD получается, что $f(\mathbf{v}'') = x$, откуда приходим к противоречию.

Теперь, когда мы изучили все дополнительные леммы, перейдем к доказательству самой теоремы Робертса.

2 Доказательство теоремы Робертса

2.1 Идея доказательства

Чтобы показать, что функция — это аффинный максимизатор, на самом деле надо изучать разности. Это потому, что аффинная максимизация на самом деле эквивалентна системе неравенств:

$$\sum_{i=1}^{N} k_i(v_i(x) - v_i(y)) \geq C_y - C_x,$$

где

$$f(v) = x \neq y.$$

Мы будем изучать структуру этих самых разностей.

Главное множество, которое мы будем изучать — это

$$P(x, y) = \{\alpha \in \mathbb{R}^N \mid \exists \mathbf{v} : \mathbf{v}(x) - \mathbf{v}(y) = \alpha, f(\mathbf{v}) = x\}.$$

Т.е. если $f(\mathbf{v}) = x$, то $\mathbf{v}(x) - \mathbf{v}(y) \in P(x, y)$.

В течение доказательства мы увидим, какова структура множеств $P(x, y)$ и покажем, что $P(x, y)$ — это полупространство. В частности, мы сделаем два важных замечания о структуре $P(x, y)$. Во-первых,

$$\alpha \in P(x, y) iff - \alpha \notin P(y, x), \tag{1}$$

и внутренности $P(x, y)$ и $P(y, x)$ не пересекаются.
И во-вторых,

$$P(x, y) + P(y, z) = P(x, z) \tag{2}$$

(по крайней мере, для внутренних точек).

Для чего нужны данные свойства? Предположим, что $\vec{0} \in P(x, y)$ для всех $x, y \in \mathcal{O}$ (на самом деле, это не обязательно так). Тогда по второму условию все $P(x, y)$ равны. Введём новое обозначение – пусть они равны C. По первому условию $C \cup -C = \mathbb{R}^N$: если $\alpha \notin C$, то $-\alpha \in C$. Также из первого условия следует, что C — выпуклое множество: если $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \notin C$, то $-\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \in C$, тогда используя второе условие получаем, что $\alpha + \beta \in C$, и, значит, $\alpha + \beta - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \in C$. Противоречие.

Таким образом, C и $-C$ покрывают всё пространство, выпуклы, и их внутренности не пересекаются. Это в точности означает, что они являются подпространствами.

2.2 Доказательство теоремы

Так как f — сюръекция, то $P(x, y)$ не пусто для любых x и y. Также, если $\alpha \in P(x, y)$ то для любого положительного $\delta \in \mathbb{R}^N$, $\alpha + \delta \in P(x, y)$ тоже: рассмотрим v: $f(v) = x$ и $\mathbf{v}(x) - \mathbf{v}(y) = \alpha$. Увеличим $\mathbf{v}(x)$ на δ. Так как $\mathbf{v}$ у нас неограниченные, то получится, что δ тоже будет лежать в $P(x, y)$.

Лемма 4 *Лемма, которая доказывает свойство (1) идеи доказательства* 2.1. *Рассмотрим случайные вектора $\alpha, \epsilon \in P(x, y)$. Лемма утверждает, что*

$$\alpha - \epsilon \in P(x, y) \to -\alpha \notin P(y, x)$$

$$\alpha \notin P(x, y) \to -\alpha \in P(y, x)$$

Доказательство Т.е. получится свойство (1) идеи доказательства 2.1, но для внутренних точек. Докажем первую часть леммы. Пусть наоборот $-\alpha \in P(y, x)$. Тогда существует $\mathbf{v}$ такой, что

$$\mathbf{v}(y) - \mathbf{v}(x) = -\alpha, \quad f(\mathbf{v}) = y.$$

$\alpha - \epsilon \in P(x,y)$, следовательно, существует такой $\mathbf{v}'$, что $\mathbf{v}'(x) - \mathbf{v}'(y) = \alpha - \epsilon$, и $f(\mathbf{v}') = x$. Тогда верно

$$\mathbf{v}(x) - \mathbf{v}(y) = \alpha > \mathbf{v}'(x) - \mathbf{v}'(y) = \alpha - \epsilon,$$

что противоречит лемме про PAD.

Пока мы доказали, что внутренние области $P(x,y)$ и $P(y,x)$ не пересекаются, и объединение $P(x,y)$ и $-P(y,x)$ составляет всё пространство. Кроме того свойство (2) идеи доказательства 2.1 нам показало, что граница у $P(x,y)$ монотонно невозрастающая. Так как мы доказали, что $\alpha + \delta \in P(x,y)$, если $\alpha \in P(x,y)$, то граница возрастающей быть не может. Если граница будет возрастающей, то тогда мы сможем прибавить α к δ и попасть вне $P(x,y)$.■

Осталось только показать, что границы являются гиперплоскостями, и тогда мы докажем все необходимые свойства $P(x,y)$. Также стоит показать, что $P(x,y)$ и $P(y,x)$ это одно и тоже.

Лемма 5 *Пусть у нас есть два вектора α, β, и у них есть две погрешности $\epsilon^\alpha, \epsilon^\beta \in \mathbb{R}^N$ и $\epsilon^\alpha, \epsilon^\beta > \vec{0}$. Тогда докажем следующую транзитивность:*

$$\alpha - \epsilon^\alpha \in P(x,y), \beta - \epsilon^\beta \in P(y,z) \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta - \frac{\epsilon^\alpha + \epsilon^\beta}{2} \in P(x,z).$$

Доказательство Выберем $w \neq x,y,z$ и $\delta^w \in P(x,w)$, $\epsilon > \vec{0} \in \mathbb{R}^N$. Также мы выберем такой $\mathbf{v}$, что

$$\mathbf{v}(x) - \mathbf{v}(y) = \alpha - \frac{\epsilon^\alpha}{2}, \quad \mathbf{v}(y) - \mathbf{v}(z) = \beta - \frac{\epsilon^\beta}{2}, \mathbf{v}(x) - \mathbf{v}(w) = \delta^w + \epsilon.$$

Значит они лежат в соответствующих множествах. Тогда по лемме PAD $f(v) = x$, и, следовательно,

$$\alpha + \beta - \frac{\epsilon^\alpha + \epsilon^\beta}{2} = \mathbf{v}(x) - \mathbf{v}(z),$$

которая лежит в $P(x,z)$.■

Вернемся к доказательству теоремы. Если бы было верно, что $\vec{0} \in P(x,y)$, то мы бы уже доказали всю теорему, т.к. лемма 5, примененная к $\vec{0}$, доказывала бы, что внутренности всех $P(x,y)$ равны. Т.е. мы бы доказали, что $P(x,y) = P(w,w)$, прибавляя к какому-нибудь α нулевые вектора. Но это не совсем верно.

Давайте возьмем множества и сдвинем их на

$$\gamma(x,y) = \inf\{p \in \mathbb{R} \mid p \cdot \vec{1} \in P(x,y)\}.$$

$\gamma(x,y)$ - число, инфимум всех чисел, для которых прямая гиперплоскость $\mid p \cdot \vec{1}$ начинает пересекаться с $P(x,y)$. Рассмотрим множество $P(x,y)$, и вот когда гиперплоскость, его подпирающая, наконец-то до него дойдет, её коэффициент будет равен $\gamma(x,y)$.

Лемма 6 *Для всех $x,y,z \in \mathcal{O}$:*
$\gamma(x,y) = -\gamma(y,x)$;
$\gamma(x,z) = \gamma(x,y) + \gamma(y,z)$.

Доказательство Первый пункт: для всякого $\epsilon > 0$

$$(\gamma(x,y) + \frac{\epsilon}{2}) \cdot \vec{1} \in P(x,y).$$

Потому что начиная с $\gamma(x,y)$ все уже лежит в $P(x,y)$. Значит по лемме 5

$$(-\gamma(x,y) - \epsilon) \cdot \vec{1} \notin P(y,x).$$

Но с другой стороны,
$$(\gamma(x,y)-\epsilon)\cdot\vec{1}\notin P(x,y),$$
т.к. $\gamma(x,y)$ не лежит в $P(x,y)$, и, следовательно, наоборот
$$(-\gamma(x,y)+\frac{\epsilon}{2})\cdot\vec{1}\in P(y,x).$$
Т.е. получилось, что для любого ϵ $-\gamma(x,y)-\epsilon\notin P(x,y)$, а
$$-\gamma(x,y)+\epsilon\in P(x,y).$$

Второй пункт: поделим ϵ пополам, рассмотрим вектора
$$(\gamma(x,y)+\frac{\epsilon}{2})\cdot\vec{1}\in P(x,y)\quad(\gamma(y,z)+\frac{\epsilon}{2})\cdot\vec{1}\in P(y,z).$$

Тогда, по лемме 5,
$$(\gamma(x,y)+\gamma(y,z)+\epsilon)\cdot\vec{1}\in P(x,z).$$
Только что мы доказали, что
$$\gamma(z,x)\leq\gamma(z,y)+\gamma(y,x).$$
В другую сторону доказывается заменой букв y и z, и следовательно, заменив одну из $\gamma(x,y)$ на $-\gamma(y,x)$ получим необходимое неравенство
$$\gamma(z,x)\geq\gamma(z,y)+\gamma(y,x).$$

■

Теперь мы можем сдвинуть множества $P(x,y)$. Введем новые множества
$$C(x,y)=P(x,y)-\gamma(x,y)\cdot\vec{1}.$$
для того, чтобы $\vec{0}\in C(x,y)$. Другими словами $C(x,y)=\{\alpha-\gamma(x,y)\cdot\vec{1}\mid\alpha\in P(x,y)\}$
Также обозначим через $\dot{C}$ внутренность C или формально:
$$\dot{C}=\{\alpha\in C\mid\alpha-\epsilon\in C\quad\epsilon\vec{0}\}.$$

Лемма 7 *$\dot{C}(x,y)=\dot{C}(w,z)$ для любых $x,y,w,z\in\mathcal{O}$, $x\neq y$, $w\neq z$. Т.е. другими словами это означает, что внутренности всех C совпадают.*

Доказательство По второму пункту леммы 6
$$\dot{P}(x,y)\subseteq\dot{P}(x,z)-\beta$$
для любого $\beta\in\dot{P}(y,z)$. Также это верно для для $\beta=(\gamma(y,z)+\epsilon)\cdot\vec{1}$. Аналогично,
$$\dot{P}(x,z)\subseteq\dot{P}(w,z)-\alpha$$
для любого $\alpha=(\gamma(w,x)+\epsilon)\cdot\vec{1}$, т.е. получается, что
$$\dot{P}(x,y)\subseteq\dot{P}(w,z)-(\gamma(y,z)+\gamma(w,x))\cdot\vec{1}.$$
Также по второму пункту леммы 6.
$$\gamma(y,z)+\gamma(w,x)=\gamma(y,z)+\gamma(w,y)+\gamma(y,x)=\gamma(w,z)-\gamma(x,y).$$

И перенося вправо $\gamma(w,z)$ получаем, что

$$\dot{P}(x,y)-\gamma(x,y)\cdot\vec{1}\subseteq\dot{P}(w,z)-\gamma(w,z)\cdot\vec{1}.$$

Тогда, ввиду произвольности выбора x,y,w,z, мы выведем, что $\dot{P}(a,b)-\gamma(a,b)\cdot\vec{1}$ равны, т.е. $\dot{C}$ все равны тоже.■

Также стоит заметить, что $\dot{C}(x,y)=\dot{C}(y,x)$. Для доказательства этого выберем $w\in\mathcal{O}$, отличный от x и y. И использовав вышедоказанную лемму для пар равенств из следующей цепочки

$$\dot{C}(x,y)=\dot{C}(w,y)=\dot{C}(w,x)=\dot{C}(y,x),$$

получим необходимое утверждение.

Для завершения доказательства сначала докажем, что C выпукло.

Лемма 8 *C выпукло.*

Доказательство Пусть $\alpha,\beta\in C\subseteq\Re^n$. Для начала покажем, что $\alpha+\beta\in C$. Зафиксируем разные $x,y,z\in\mathcal{O}$. Тогда

$$\gamma(x,y)\cdot\vec{1}+\alpha\in\dot{P}(x,y),\ \gamma(y,z)\cdot\vec{1}+\beta\in\dot{P}(y,z)$$

по определению $\gamma(a,b)$. Сложим их:

$$\gamma(x,z)\cdot\vec{1}+\alpha+\beta\in\dot{P}(x,z),$$

и значит $\alpha+\beta\in C$.

Вторая часть – давайте докажем, что если $\alpha\in C$, то и $\frac{\alpha}{2}\in C$.

Пусть $\alpha\in C$, но $\frac{\alpha}{2}\notin C$.Тогда $\frac{\alpha}{2}+\gamma(x,y)\cdot\vec{1}\notin P(x,y)$, $,-\frac{\alpha}{2}-\gamma(x,y)\cdot\vec{1}\in P(y,x)$, и, следовательно, $-\frac{\alpha}{2}\in C$, и, $\frac{\alpha}{2}\in C$. Но $P(x,y)=P(y,x)$, тогда мы заменяем с переносом $-\gamma(x,y)$ на $\gamma(y,x)$, и, следовательно,

$$P(y,x)-\gamma(y,x)\cdot\vec{1}=C(y,x),$$

а тогда $-\frac{\alpha}{2}\in C$ и $\frac{\alpha}{2}\in C$. Таким образом, $\frac{\alpha+\beta}{2}\in C$, т.е. C выпукло.■

Завершаем доказательство теоремы. Во-первых, $\vec{0}\notin\dot{C}$, т.к. он должен быть на границе, если он там, т.к. если $x\in C$, то $-x\notin C$. существует $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^N$, для которого $\mathbf{k}\cdot\alpha\geq 0$ для любого $\alpha\in\bar{C}$ (в замыкании) – Это лемма об отсекающей гиперплоскости, т.е. если есть выпуклое множество, и есть точка, которая не лежит во внутренности, то через неё можно провести гиперплоскость, такую, что всё множество будет лежать по одну сторону от этой гиперплоскости. Этот вектор $\mathbf{k}$ будет теми константами k_i, которые нас интересуют для аффинного максимизатора. Зафиксируем исход $x_0\in\mathcal{O}$ и константы

$$C_x=\sum_{i=1}^{N}k_i\gamma(x_0,x).$$

Докажем теперь все необходимые неравенства, т.е.

$$\sum_{i=1}^{N}k_i(v_i(x)-v_i(y))\geq C_y-C_x,$$

где $f(v)=x\neq y$. Если $f(v)=x\neq y$, то $v(x)-v(y)\in P(x,y)$. Обозначим

$$\alpha=v(x)-v(y)-\gamma(x,y)\cdot\vec{1}.$$

Тогда $\alpha\in\bar{C}$. Это получается по определению констант k_i и $P(x,y)$. Значит, $\mathbf{k}\cdot\alpha\geq 0$. Так как

$$-\gamma(x,y)=\gamma(x_0,x)-\gamma(x_0,y),\quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}(x)+C_x\geq\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}(y)+C_y,$$

и это и есть утверждение теоремы, так как мы доказывали для совершенно любого P.■

3 Второе доказательство теоремы Робертса

Второе доказательство использует другое условие монотонности, и пользуется иным методом анализа. Мы так же должны использовать одно дополнительное условие (Meyer-ter-Vehn and Moldovanu):

Определение 5 *Задим функцию социального выбора* $f : \mathbf{V} \to \mathbf{A}$. *Будем говорить что игрок* i *решающий, если для каждого* $\mathbf{v}_{-i} \in \mathbf{V}_{-i}$ *и* $x \in \mathbf{A}$ *существует* $v_i \in V_i$ *такой что* $f(v_i, \mathbf{v}_{-i}) = x$.

Другими словами, имея типа других игроков, игрок i может вынудить выбор любой из альтернатив (например задавая “достаточно высокое” значение). Интересно отметить тот факт, что существует только две возможные альтернативы, принцип большинства (то есть когда игрок 1 “голосует” за альтернативу x наибольшим значением) применим, но не имеет решающего значения. Для трех и более альтернатив, мы знаем по предыдущему доказательству, что каждая выполнимая функция социального выбора должна допускать как минимум одного решающего игрока, но мы не знаем простого и яснова способа доказать это. Таким образом наше доказательство явно требует существование одного решающего игрока.

Теорема 2 *Пусть* $|\mathcal{A}| \geq 3$, *и* $\mathbf{V}$ *неограничено. Тогда для каждой правдиво реализуемой функции социального выбора* f *существуют неотрицательные веса* $k_1, \ldots, k_N$, *не все равные нулю, и константы* C_x, $x \in \mathcal{O}$, *для которых для всех* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$

$$f(\mathbf{v}) \in \operatorname{argmax}_{x \in \mathcal{O}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i v_i(x) + C_x \right\}.$$

Далее, без потери общности, будем считать что игрок 1 решающий. Далее в теореме будем использовать следующую нотацию: оценка $v' = v + \epsilon * 1_{i,x}$, или эквивалентно, $v' = (v_i + \epsilon \cdot 1_x, v_{-i})$ практически равна v, за исключением того что $v_i(x)$ увеличена на ϵ. Так же e_j обозначает вектор длины j.

Доказательство в этой секции анализирует следствие из следующей простой идеи. Эта идея является следствием работ J.C. Rochet, и сильно связано с W-MON.

Определение 6 *Для каждых двух различных* $x, y \in \mathbf{A}$, *и для любого* $v_{-i} \in V_{-i}$ *определим:*

$$\delta^i_{xy}(v_{-i}) = \inf\{v'_i(x) - v'_i(y) | v'_x \in V_i : f(v'_i, v_{-i}) = x\}.$$

По определению, если $f(v) = x$, то тогда $v'_i(x) - v'_i(y) < \delta^i_{xy}(v_{-i})$ для всех $y \in \mathbf{A}$. Иными словами, если зафиксировать $v_{-i}, \delta^i_{xy}(v_{-i})$ это минимальное значение разницы между x и y всякий раз когда f выбирает x. Следующее утверждение иссдежует структурные характеристики этого определения, для случая неограниченной области, и показывает что $\delta^1_{xy}(v_{-i})$ это аффинная функция вектора значений разницы $v'_1(x) - v'_1(y)$. Отсюда последует свойство аффинной максимизации.

Лемма 9 *Для каждого* $v_{-1} \in V_{-1}, x, y \in A, \delta^1_{xy}(v_{-i})$ *есть вещественное число, и* $\delta^1_{xy}(v_{-i}) + \delta^1_{yx}(v_{-i}) \geq 0$.

Доказательство Положим, что существует $v_1 \in V_1$ такой что $f(v_1, v_{-1}) = x$. Тогда $\delta^1_{xy}(v_{-i}) \leq v_1(x) - v_1(y) < \infty$. В дополнении, предположение так же включает тот факт что существует v^*_1 такое что $f(v^*_1, v_{-1}) = y$. Для каждого $v'_1 \in V_1$ с $f(v'_1, v_{-1}) = x$ мы имеем, по свойству $W - MON$, что $v'_1(x) - v'_1(y) \geq v^*_1(x) - v^*_1(y)$. Следовательно, $\delta^1_{xy}(v_{-i}) \geq v^*_1(x) - v^*_1(y) > -\infty$.

Для второй части, зафиксируем любое $\epsilon > 0$, и возьмем $v^*_1 \in V_1$ так что $f(v^*_1, v_{-1}) = y$ и $v^*_1(x) - v^*_1(y) \leq \delta^1_{xy}(v_{-i}) + \epsilon$, и $v'_1 \in V_1 f(v'_1, v_{-1}) = x$ и $v'_1(x) - v'_1(y) \leq \delta^1_{xy}(v_{-i}) + \epsilon$. По свойству W-MON мы имеем $v'_1(x) - v'_1(y) \geq v^*_1(x) - v^*_1(y)$. Тогда $\delta^1_{xy}(v_{-i}) + \epsilon \geq v'_1(x) - v'_1(y) \geq v^*_1(x) - v^*_1(y) \geq -\delta^1_{yx}(v_{-i}) - \epsilon$. Следовательно, $\delta^1_{xy}(v_{-i}) + \delta^1_{yx}(v_{-i}) + 2 \cdot \epsilon \geq 0$ для любого $\epsilon > 0$. Лемма доказана.$\blacksquare$

Лемма 10 *Для каждого* $v_{-1} \in V_{-1}, x, y \in A, \delta^1_{xy}(v_{-i}) + \delta^1_{yx}(v_{-i}) = 0$.

Доказательство По предыдущей лемме достаточно показать, что $\delta^1_{xy}(v_{-i}) + \delta^1_{yx}(v_{-i}) \leq 0$. Для каждого $\epsilon \geq 0$ и v_1 таких что $f(v_1, v_{-1}) = x$ и $v_1(x) - v_1(y) = \epsilon + \delta^1_{xy}(v_{-i})$, рассмотрим $v'_1 = v_1 + 3\epsilon \cdot 1_y + \epsilon \cdot 1_x$. Тогда $f(v'_1, v_{-1}) \in x, y$ по W-MON. Однако, $f(v'_1, v_{-1})$ не может быть x, так как $v'_1(x) - v'_1(y) = (v_1(x) + \epsilon) - (v_1(y) + 3\epsilon) < \delta^1_{xy}(v_{-i})$. Мы получили что $f(v'_1, v_{-1}) = y$. Тогда $\delta^1_{yx}(v_{-i}) \leq v'_1(x) - v'_1(y) + 2\epsilon = -\delta^1_{xy}(v_{-i}) + \epsilon$, и таким образом $\delta^1_{xy}(v_{-i}) + \delta^1_{yx}(v_{-i}) \leq \epsilon$ для каждого $\epsilon \geq 0$.$\blacksquare$

Лемма 11 *Для каждого $v_{-1} \in V_{-1}, x, y, z \in A, \delta^1_{xy}(v_{-i}) + \delta^1_{yz}(v_{-i}) + \delta^1_{zx}(v_{-i}) = 0$.*

Доказательство Зафиксируем v_{-1}. Для каждого v_1, v_1', v_1'' таких что $f(v_1, v_{-1}) = x$, $f(v_1', v_{-1}) = y$, $f(v_1'', v_{-1}) = z$, верность предполагает что $v_1(x) - p_1(x, v_{-1}) \geq v_1(y) - p_1(y, v_{-1})$, $v_1'(z) - p_1(z, v_{-1}) \geq v_1'(z) - p_1(z, v_{-1})$, и $v_1''(z) - p_1(z, v_{-1}) \geq v_1''(x) - p_1(x, v_{-1})$. Тогда $v_1(x) - v_1(y) + v_1'(y) - v_1'(z) + v_1''(z) - v_1''(x) \geq 0$. В частности, $\delta^1_{xy}(v_{-i}) + \delta^1_{yz}(v_{-i}) + \delta^1_{zx}(v_{-i}) \geq 0$.

Теперь предположим, что существуют v_{-1}, x, y и z такие что $\delta^1_{xy}(v_{-i}) + \delta^1_{yz}(v_{-i}) + \delta^1_{zx}(v_{-i}) > 0$. По предыдущей лемме $[\delta^1_{xy}(v_{-i}) + \delta^1_{yx}(v_{-i})] + [\delta^1_{yz}(v_{-i}) + \delta^1_{zy}(v_{-i})] + [\delta^1_{zx}(v_{-i}) + \delta^1_{xz}(v_{-i})] = 0$. Таким образом, $\delta^1_{xz}(v_{-i}) + \delta^1_{zy}(v_{-i}) + \delta^1_{yx}(v_{-i}) < 0$, противоречие. ■

Следующие две леммы покажут, что $\delta^1_{xy}(v_{-i})$ зависит только от $v_{-1}(x) - v_{-1}(y)$, (n-1)-мерного вектора, получающегося в результате разности $v_{-1}(x)$ и $v_{-1}(y)$. Вспомним, что $(v - \epsilon \cdot 1_{j,z})$ означает оценку v в которой игрок j уменьшил его значение для альтернативы z на ϵ.

Лемма 12 *Для каждого $L \geq 0, j \neq 1, v_{-1} \in V_{-1}$, и различных $x, y, z \in A : \delta^1_{xy}(v_{-i}) = \delta^1_{xy}(v_{-1} - L \cdot 1_{j,z})$.*

Доказательство Возьмем $v_{-1}' = v_{-1} - L \cdot 1_{j,z}$. Если $f(v_1, v_{-1}) = x$, то по S-MON $f(v_1, v_{-1}') = x$, и таким образом $\delta^1_{xy}(v_{-1}) \geq \delta^1_{xy}(v_{-1}')$. Предположим от противного, что $\delta^1_{xy}(v_{-1}) > \delta^1_{xy}(v_{-1}')$. Сперва заметим что для так же как для предыдущих аргументов, $\delta^1_{yx}(v_{-1}) \geq \delta^1_{yx}(v_{-1}')$. Но $\delta^1_{xy}(v_{-1}) + \delta^1_{yx}(v_{-1}) = 0 = \delta^1_{xy}(v_{-1}') + \delta^1_{yx}(v_{-1}')$. Но по предположению, левая часть этого равенства больше чем правая, противоречие. ■

Лемма 13 *Пусть $x, y \in A$, и пусть $v_{-1}(x) - v_{-1}(y) = v_{-1}'(x) - v_{-1}'(y)$ таковы что $v_{-1}(x) - v_{-1}(y) = v_{-1}'(x) - v_{-1}'(y)$. Тогда $\delta^1_{xy}(v_{-1}) = \delta^1_{xy}(v_{-1}')$.*

Доказательство Зафиксируем любые $v_{-1}, v_{-1}' \in V_{-1}$ такие что $v_{-1}(x) - v_{-1}(y) = v_{-1}'(x) - v_{-1}'(y)$. Для каждого $j \neq 1$ и для каждого $v_j \in V_j$, S-MON подразумевает, что добавление константы ко всем координатам v_j не изменит выбора f. Таким образом, без потери общности, мы можем предположить что $v_j(x) = v_j'(x)$ и $v_j(y) = v_j'(y)$. Теперь определим $v_j''(w) = \min\{v_j(w), v_j'(w)\}$ для каждого $w \in A$. По предыдущей лемме, мы имеем $\delta^1_{xy}(v_{-1}) = \delta^1_{xy}(v_{-1}') = \delta^1_{xy}(v_{-1}'')$, лемма доказана.■

Последняя лемма показывает, что $\delta^1_{xy}(v_{-i})$ зависит только от $v_{-1}(x) - v_{-1}(y)$. Теперь мы немного нарушим нотацию, и для простоты написания примем $\delta^1_{xy}(v_{-i})$ за $\delta^1_{xy}(v_{-1}(x) - v_{-1}(y))$. Из этого следует:

Следствие 1 *Для каждого $\bar{r}, \bar{t} \in R^{n-1}, x, y, z \in A : \delta^1_{xy}(\bar{r}) + \delta^1_{yx}(-\bar{r}) = 0$, и $\delta^1_{xy}(\bar{r}) + \delta^1_{yz}(\bar{t}) + \delta^1_{zx}(-\bar{r} - \bar{t}) = 0$. В частности, $\delta^1_{xy}(\bar{0}) + \delta^1_{yx}(\bar{0}) = 0$, и $\delta^1_{xy}(\bar{0}) + \delta^1_{yz}(\bar{0}) + \delta^1_{zx}(\bar{0}) = 0$.*

Лемма 14 *Для каждого $\bar{r}, \bar{s}, \bar{t} \in R^{n-1}, x, y, z \in A : \delta^1_{yx}(\bar{r} + \bar{t}) - \delta^1_{yx}(\bar{r}) = \delta^1_{zx}(\bar{s} + \bar{t}) - \delta^1_{zx}(\bar{s})$.*

Доказательство Достаточно показать, что $\delta^1_{zx}(\bar{s}) - \delta^1_{yx}(\bar{r}) = \delta^1_{zx}(\bar{s} + \bar{t}) - \delta^1_{yx}(\bar{r} + \bar{t})$. По следствию 1, $\delta^1_{zx}(\bar{s}) - \delta^1_{yx}(\bar{r}) = \delta^1_{zx}(\bar{s}) + \delta^1_{xy}(-\bar{r}) = -\delta^1_{yz}(\bar{r} - \bar{s})$. Аналогично, $\delta^1_{zx}(\bar{s} + \bar{t}) - \delta^1_{yx}(\bar{r} + \bar{t}) = -\delta^1_{yz}(\bar{r} - \bar{s})$.■

Лемма 15 *Существуют неотрицательные константы $k_2, \ldots, k_n$, такие что для каждого $\bar{r} \in R^{n-1}$ и $y, z \in A, \delta^1_{yz}(\bar{r}) = -\sum_{j=2}^{n} k_j r_j + \delta^1_{yz}(\bar{0})$.*

Доказательство Для доказательства этой леммы нам нужен следующих технический факт (его доказательство приводится в конце). Здесь, функция $g : \Re^n \to \Re$ монотонная, если для каждого $\alpha, \beta \in \Re^n$ где $\beta_i \geq \alpha_i$ для каждого i, в этом случае $g(\beta) \geq g(\alpha)$.

Техническая лемма: *Зафиксируем какую-нибудь монотонную функцию $g : \Re^n \to \Re$, и предположим что существует $h_i : \Re^n \to \Re$ такие что $g(r + \delta \cdot e_i) - g(r) = h_i(\delta)$ для каждого $r \in \Re$ и $\delta < 0$ (где e_i это i-ый единичный вектор). Тогда существуют константы $k_i \in \Re$ и $\gamma \in \Re$ такие что $g(r) = \sum_{i=1}^{n} k_i r_i + \gamma$.*

Доказательство [Леммы] Сначала заметим, что $\delta^1_{yz}(\cdot)$ это монотонная невозрастающая вещественная функция: Если $f(v_1, v_{-1}) = y$ то тогда $f(v_1, v_{-1} + \epsilon \cdot 1_{j,y}) = y$ по S-MON. Тогда, инфимум на $v_{-1} + \epsilon \cdot 1_{j,y}$ получается на "большем"наборе, а этот "меньше". По лемме 14 и по технической лемм получаем, что существуют вещественные константы k_j^{yz} такие что $\delta^1_{yz}(\bar{r}) = -\sum_{j \neq 2} k_j^{yz} r_j + \delta^1_{yz}(\bar{0})$. Поскольку $\delta^1_{yz}(\cdot)$ монотонна и невозрастает, то все k_j^{yz} должны быть не положительны. Перепишем для удобства это равенство как $\delta^1_{yz}(\bar{r}) = \sum_{j\neq 2} k^{yz}_j r_j + \delta^1_{yz}(\bar{0})$, и будем считать что константы k^{yz}_j неотрицательны. Убедимся, что $k^{xy}_j = k^{wz}_j$ для любых $x, y, z, w \in A$. Выше мы получили что $k^{xy}_j = \delta^1_{xy}(\bar{0}) - \delta^1_{xy}(\bar{e_j})$. По следствию 1 мы получаем $k^{xy}_j = k^{zx}_j$ как $\delta^1_{xy}(\bar{e_j}) + \delta^1_{yz}(\bar{0}) + \delta^1_{xy}(-\bar{e}_j) = 0$. Аналогично, $k^{zx}_j = k^{wz}_j$.■

Теперь мы легко можем завершить доказательство теоремы. Зафиксируем случайную альтернативу $w \in A$, и зададим константы $C_x = \delta^1_{wx}(\bar{0})$ для каждых $x \neq w$, и $C_w = 0$. Зафиксируем $v \in V$, и предположим что $f(v) = x$. Следовательно, для каждых $y \neq x, v_1(x)-v_1(y) \geq \delta^1_{xy}(v_{-1}) = -\sum_{j\neq 1} k_j(v_j(x) - v_j(y)) + \delta^1_{xy}(\bar{0})$. Так как $\delta^1_{xy}(\bar{0}) = \delta^1_{xw}(\bar{0}) + \delta^1_{wy}(\bar{0})$ и $\delta^1_{xw}(\bar{0}) = -\delta^1_{wx}(\bar{0})$ мы, переставляя элементы, получаем, что $v_1(x) + \sum_{j\neq 1} k_j v_j(x) + C_x \geq v_1(y) + \sum_{j\neq 1} k_j v_j(y) + C_y$, что и требовалось. ■

Доказательство технической леммы

Мы можем разбить лемму на две:

Лемма 16 *Предположим, $m : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}$ монотонная неубывающая функция, и существует $h : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}_+$, такая что $m(x + \delta) - m(x) = h(\delta)$ для любых $x, \delta \in \mathcal{R}_+$. Тогда существует $w \in \mathcal{R}_+$ такое что $h(\delta) = w \cdot \delta$.*

Доказательство Пусть $w = h(1)$ (заметим что $w \geq 0$, так как m неубывает). Сначала мы докажем, что для любых двух целых чисел $p, q, h(p/q) = w \cdot (p/q)$. Заметим, что $h(1) = m(1) - m(0) = \sum_{i=0}^{q-1} m((i+1)/q) - m(i/q) = q \cdot h(1/q)$. Таким образом $h(1/q) = (1/q) \cdot h(1)$. Аналогично, $h(p/q) = m(p/q) - m(0) = \sum_{i=0}^{p-1} m((i+1)/q) - m(i/q) = p \cdot (1/q) = (p/q) \cdot h(1) = (p/q) \cdot w$. Теперь докажем, что для любого вещественного $\delta, h(\delta) = \delta \cdot w$. Заметим, что так как m монотонно неубывает, тогда h должна так же монотонно неубывать. Предположим от противного, что $h(\delta) > \delta \cdot w$. Возьмем некоторое рациональное число $r > \delta$, достаточно близкое к δ, так что $h(\delta) = r \cdot w$. Так как h монотонна, и $r > \delta$, то $h(r) \geq h(\delta)$, но так как r рациональное, $h(r) = r \cdot w < h(\delta)$, противоречие. Доказательство аналогично при $h(\delta) < \delta \cdot w$.■

Лемма 17 *Предположим, что $X \subseteq \mathcal{R}^{\setminus}$ имеет свойство, что если $x \in X$ и $y \geq x$, то $y \in X$. Возьмем монотоно неубывающую функцию $m : X \to \mathcal{R}$, и предположим что существуют $w_1, \ldots, w_n$, такие что $m(x + \delta \cdot e_i) - m(x) = w_i \cdot \delta$ для любых $i, x \in X\delta > 0$. Тогда существуют $\gamma \in \mathcal{R}$, такие что $m(x) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i + \gamma$.*

Доказательство Сначала мы докажем, что для любых $x, y \in X$, таких что $y_i \geq x_i$ для всех i, в этом случае $m(y) = m(x) + \sum_{i=1}^n w_i \cdot (y_i - x_i)$. Заметим, что $(y_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ и $m(y_1, x_2, \ldots, x_n) = m(x) + h_1(y_1 - x_1)$. Повторяя этот шаг n раз мы получаем, что $m(y) = m(x) + \sum_{i=1}^n w_i \cdot (y_i - x_i)$.

Теперь зафиксируем любой $x^* \in X$. Докажем, что для любого $x \in X, m(x) = m(x^*) + \sum_{i=1}^n w_i \cdot (x_i - x^*_i$. Чтобы увидеть это, выберем некоторое число y, такое что $y_i \geq \max\{x_i, x^*_i\}$ для всех i. Таким образом $m(y) = m(x) + \sum_{i=1}^n w_i \cdot (y_i - x_i)$, и так же $m(y) = m(x^*) + \sum_{i=1}^n w_i \cdot (y_i - x^*_i$, из чего следует доказываемое утверждение.■