

Криптография с открытым ключом

Сергей Николенко

Криптография — CS Club, осень 2009

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом

Арифметика по модулю n

- \mathbb{Z}_n^+ — это группа по сложению.
- \mathbb{Z}_n^* — это группа по умножению.
- Сколько элементов в \mathbb{Z}_n^* ?

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом

Арифметика по модулю n

- \mathbb{Z}_n^+ — это группа по сложению.
- \mathbb{Z}_n^* — это группа по умножению.
- Сколько элементов в \mathbb{Z}_n^* ?
- Если p — простое, то \mathbb{Z}_p — это поле: у каждого элемента, кроме нуля, есть обратный по умножению.
- Над полем верны полезные факты из алгебры: например, над полем многочлен степени d имеет не более d корней.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом

Outline

1 Присказка: совсем немножко теории чисел

- Арифметика
- Степени и корни
- Дискретный логарифм

2 Сказка: RSA и криптосистема Рабина

- RSA
- Криптосистема Рабина

Арифметика по модулю n

- \mathbb{Z}_n^+ — это группа по сложению.
- \mathbb{Z}_n^* — это группа по умножению.
- Сколько элементов в \mathbb{Z}_n^* ?
- Обратимые элементы в \mathbb{Z}_n — это взаимно простые с n .
- Их всего $\phi(n)$ — функция Эйлера. Если p и q простые, то

$$\phi(p) = p - 1, \quad \phi(pq) = (p - 1)(q - 1).$$

Арифметика по модулю n

- На всякий случай ещё вспомним, что бывают конечные поля с p^m элементами.
- Их можно рассматривать как поля многочленов по модулю того или иного неприводимого многочлена.
- Например, поле \mathbb{F}_{16} состоит из следующих элементов:

$$\begin{array}{llll} 0, & x^2 & x^3 & x^2 + x^3 \\ 1 & x^2 + 1 & x^3 + 1 & x^2 + x^3 + 1 \\ x & x^2 + x & x^3 + x & x^3 + x^2 + x \\ x + 1 & x^2 + x + 1 & x^3 + x + 1 & x^3 + x^2 + x + 1 \end{array}$$

- Операции производятся по модулю $x^4 + x + 1$ (или $x^4 + x^3 + 1$, или $x^4 + x^3 + x^2 + 1$ — получится одно и то же поле).

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом

Малая теорема Ферма

- Если p простое, то для любого a $a^p \equiv a \pmod{p}$, а для любого a , взаимно простого с p , $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
- Соответственно, для простого p и любых m и n

если $m \equiv n \pmod{p-1}$, то $\forall a a^m \equiv a^n \pmod{p}$.

- Теорема Эйлера — для любого n и любого a , взаимно простого с n ,

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Алгоритм Евклида

- Алгоритм Евклида: классический — вычисляет \gcd .
- Кроме $d = \gcd(a, b)$, вычисляет ещё два числа x и y , такие, что $ax + by = d$.
- Как применить алгоритм Евклида, чтобы найти $a^{-1} \pmod{n}$?
- Найти такие x и y , что $ax + ny = d$, где $d = \gcd(a, n)$.
- Если $d > 1$, то a необратимо в \mathbb{Z}_p ; если $d = 1$, то $x = a^{-1} \pmod{n}$.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Repeated squarings

- Можно сделать так: запишем b как строку битов. Потом будем возводить a в квадрат, умножая на a там, где у b биты равны 1. Например:

$$b = 9_{10} = 1001_2 \Rightarrow a^b = ((a^2)^2)^2 \cdot a, 4 \text{ умножения.}$$

$$b = 65537_{10} = 10000000000000001_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow a^b = (((a^2)^2) \dots)^2 \cdot a, 17 \text{ умножений.}$$

- 17 значительно меньше, чем 65536.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Алгоритм Евклида

- Алгоритм Евклида: классический — вычисляет \gcd .
- Кроме $d = \gcd(a, b)$, вычисляет ещё два числа x и y , такие, что $ax + by = d$.
- Как применить алгоритм Евклида, чтобы найти $a^{-1} \pmod{n}$?

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Возведение в степень

- Если есть два числа a и b по модулю n , и мы хотим вычислить $a^b \pmod{n}$, то можно вычислить

$$a^2 \pmod{n}, a^3 \pmod{n}, \dots$$

- Здесь $b - 1$ умножение по модулю n .
- Можно ли лучше?

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Квадратные корни

- Теперь давайте наоборот. Как по $x^2 \pmod{p}$ найти $x \pmod{p}$?
- Во-первых, не всякое число является квадратом по модулю p . Те, которые являются, называются **квадратичными вычетами**.
- В \mathbb{Z}_p^* вычетов столько же, сколько невычетов, а именно $\frac{p-1}{2}$. Почему?

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Квадратные корни

- Рассмотрим $1^2, 2^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$.
 - Поскольку $n^2 \equiv (p-n)^2 \pmod p$, всего вычетов не больше $\frac{p-1}{2}$.
 - Пусть их меньше. Тогда для некоторых $1 \leq i, j \leq \frac{p-1}{2}$
- $$i^2 \equiv (-i)^2 \equiv j^2 \equiv (-j)^2 \pmod p.$$
- Иначе говоря, у уравнения $x^2 \equiv i^2 \pmod p$ четыре разных корня.
 - Но \mathbb{Z}_p — поле, и у него не может быть больше двух корней.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Символ Лежандра

- Кроме того,
- $$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right),$$
- $$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right).$$
- Это позволяет построить алгоритм для вычисления символа Лежандра $\left(\frac{a}{p}\right)$:
 - разложить $\left(\frac{a}{p}\right)$ в произведение $\left(\frac{p_1}{p}\right) \dots \left(\frac{p_m}{p}\right)$;
 - заменить на $p_i \pmod p$, перевернуть, повторить.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом

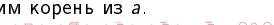


Квадратный корень

- Для $p \equiv 1 \pmod 4$ — вероятностный алгоритм.
- Рассмотрим многочлен $x^{(p-1)/2} - 1$. Он степени $\frac{p-1}{2}$, его корни — все квадратичные вычеты по модулю p , и только они.
- Теперь рассмотрим многочлен $f(x) \equiv x^2 - a \equiv (x-r)(x+r) \pmod p$. Подставим
$$f(x-\delta) \equiv (x-(\delta-r))(x-(\delta+r)) \pmod p.$$
- Факт (без доказательства): для половины δ одно из значений $(\delta-r), (\delta+r)$ является вычетом, а другое — нет.
- Выберем δ случайно и подсчитаем $\gcd(f(x-\delta), x^{(p-1)/2} - 1)$ (как многочленов).
- Тогда с вероятностью $1/2$ мы получим корень из a .

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Символ Лежандра

- Символ Лежандра:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & a \equiv 0 \pmod p, \\ 1, & a \not\equiv 0 \pmod p, \text{ и для некоторого } x \ x^2 \equiv 0, \\ -1, & a \not\equiv 0 \pmod p, \text{ и такого } x \text{ не существует.} \end{cases}$$

- Для простого p

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \pmod p.$$

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Квадратный корень

- Теперь возвращаемся к квадратному корню. Пусть дано простое p и $a \in \mathbb{Z}_p$.

- Если $p \equiv 3 \pmod 4$, то корень ищется как

$$x \equiv a^{(p+1)/4} \pmod p.$$

- Действительно,

$$1 = \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \pmod p.$$

- Значит,

$$x^2 \equiv a^{(p+1)/2} \equiv a \cdot a^{(p-1)/2} \equiv a \pmod p.$$



Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом

Для составных n

- Пусть, например, $n = pq$. Алгоритм вычисления квадратного корня из a по модулю n .

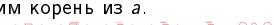
- Найти корни $(r, -r)$ числа a по модулю p .
- Найти корни $(s, -s)$ числа a по модулю q .
- Найти алгоритмом Евклида такие c и d , что $cp + dq = 1$.
- Вычислить $x = rdq + scp \pmod n$ и $y = rdq - scp \pmod n$.
- Вернуть $(\pm x, \pm y)$.

- Иначе говоря, мы можем вычислять квадратные корни, если умеем раскладывать n на множители.



Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Обсуждение алгоритма

- Вычисление квадратного корня потребовало уметь раскладывать a на множители.
- Без этого даже не проверить, является ли a вычетом.
- А можно ли наоборот? Можно ли разложить число на множители, умея вычислять квадратные корни по его модулю?

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Постановка задачи

- Теперь поставим более сложную задачу — найти логарифм.
- Дискретный логарифм:** по простому числу p , числу $a \in \mathbb{Z}_p^*$, порождающему \mathbb{Z}_p^* , и числу $b \in \mathbb{Z}_p^*$ найти такое $0 \leq x \leq p - 2$, что

$$a^x \equiv b \pmod{p}.$$

- Обобщённый дискретный логарифм:** то же в произвольной циклической группе G : по генератору $a \in G$ и $b \in G$ найти такой x , что $a^x = b$.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Замечания

- Сложность не зависит от генератора a ; для другого генератора a'
- $a^x = b = a'^y = (a^z)^y$, и $\log_a b = \log_a b (\log_a a')^{-1}$.
- Но сложность зависит от представления группы, т.е. для изоморфных групп сложность дискретного логарифма может быть разной. Почему?
- Потому что любая циклическая группа изоморфна \mathbb{Z}_n^+ для некоторого n .
- Дискретный логарифм в \mathbb{Z}_n^+ — это значит найти такой x , что $ax = b \pmod{n}$. Наверное, это не так уж сложно...

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Разложение на множители через \sqrt{a}

- Можно! Предположим, что мы умеем выдавать некий квадратный корень по модулю n .
- Возьмём случайное x , вычислим $a = x^2$ и подадим алгоритму.
- Если мы получили $\pm x$, повторим операцию. А если получили $y \neq \pm x$, то получилось, что

$$x^2 \equiv y^2 \pmod{n}, \text{ но } y \neq \pm x \pmod{n}.$$

- Это значит, что n делит $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, но при этом не делит либо $x - y$, либо $x + y$.
- Значит, $\gcd(x - y, n)$ — нетривиальный делитель n .

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Замечания

- Сложность не зависит от генератора a ; для другого генератора a'
- $a^x = b = a'^y = (a^z)^y$, и $\log_a b = \log_a b (\log_a a')^{-1}$.
- Но сложность зависит от представления группы, т.е. для изоморфных групп сложность дискретного логарифма может быть разной. Почему?

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Замечания

- Алгоритмы для задачи дискретного логарифма делятся на три группы:
 - Работающие для любых групп.
 - Работающие для любых групп, но эффективные для «гладких» (когда порядок группы имеет маленькие простые делители).
 - Эффективные только для некоторых групп.
- Мы будем их изучать в этом курсе, но позже.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Итоги присказки

- Мы теперь умеем в \mathbb{Z}_n :
 - быстро возводить в степень;
 - находить a^{-1} ;
 - использовать алгоритм Евклида;
 - применять равенство $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.
- Мы выяснили, что умеем раскладывать n на множители тогда и только тогда, когда умеем вычислять по модулю n квадратные корни.
- И узнали о задаче дискретного логарифма.

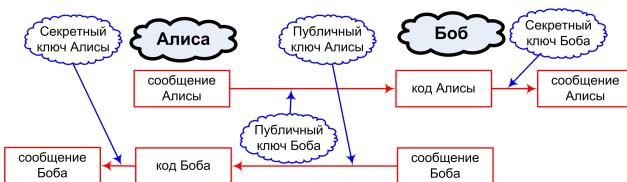
Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Принцип работы

- У каждого участника — два ключа, секретный и публичный.



Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



RSA: ключи

Алгоритм генерации ключей.

- ① Сгенерировать два больших случайных различных простых числа p и q примерно одного размера.
- ② Вычислить $n = pq$ и $\phi = (p-1)(q-1)$.
- ③ Выбрать случайное число $1 < e < \phi$, взаимно простое с ϕ .
- ④ Алгоритмом Евклида найти $d \equiv e^{-1} \pmod{\phi}$.
- ⑤ Выдать (n, e) как публичный ключ; сохранить d как секретный ключ.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Outline

- ➊ Присказка: совсем немножко теории чисел
 - Арифметика
 - Степени и корни
 - Дискретный логарифм

- ➋ Сказка: RSA и криптосистема Рабина
 - RSA
 - Криптосистема Рабина

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



RSA: история

- 1973: Clifford Cocks изобрёл RSA, но не опубликовал (работал на разведку).
- 1978: Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman.
- 1983: MIT получил патент на RSA; срок действия истекал в 2003, но в 2000 алгоритм уже был вынесен в public domain.
- Идея — кодировать сообщения так, чтобы раскодирование их опиралось на какую-нибудь сложную вычислительную проблему.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



RSA: кодирование и декодирование

- Кодирование (сообщения m с публичным ключом (n, e)).
 - ➊ Представить сообщение как число $0 \leq m \leq n - 1$.
 - ➋ Вычислить $c = m^e \pmod{n}$ и выдать c как код.
- Декодирование.
 - ➌ Вычислить $m = c^d \pmod{n}$.
 - ➍ Почему декодирование работает?

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



RSA: кодирование и декодирование

- Кодирование (сообщения m с публичным ключом (n, e)).
 - ➊ Представить сообщение как число $0 \leq m \leq n - 1$.
 - ➋ Вычислить $c = m^e \pmod{n}$ и выдать c как код.
- Декодирование.
 - ➌ Вычислить $m = c^d \pmod{n}$.
- Почему декодирование работает?
- Потому что

$$c^d \equiv m^{ed} \pmod{n}, \text{ и, т.к. } ed = 1 + k\phi,$$

$$m^{ed} \equiv m^{1+k\phi} \equiv m \pmod{n}.$$

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



RSA: простые числа

- Идея: будем выбирать случайные числа $a < n$ и проверять, верно ли, что

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}.$$
- Если нет, то n точно составное. Если да, то n , скорее всего, простое.
- Если n и a выбраны случайно, то вероятность того, что n составное, но $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, около 10^{-13} .
- Но всё-таки бывает; хуже того, бывают числа Кармайкла (Carmichael numbers), которые не являются простыми, но при этом для всех a верно $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$.
- Придётся чуть модифицировать.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



RSA: о стойкости

- Во-первых, если уметь раскладывать числа на множители, то RSA решить легко (можно вычислить секретный ключ так же, как при генерации ключей).
- Во-вторых, если враг получит секретный ключ d , он сможет разложить n на множители: т.к. $ed \equiv 1 \pmod{\phi}$, то $ed - 1 = k\phi$, и $a^{ed-1} \equiv 1 \pmod{n}$ для всех a . Выразим $ed - 1 = 2^st$ для нечётного t .
- Факт: существует $1 \leq i \leq s$, для которого

$$a^{2^{i-1}t} \not\equiv \pm 1 \pmod{n}, \text{ но } a^{2^it} \equiv 1 \pmod{n}$$

для по крайней мере половины $a \in \mathbb{Z}_n^*$.

- Врагу достаточно выбирать a случайно, искать такой i , и как только найдёт, $\gcd(a^{2^{i-1}t}, n)$ будет нетривиальным делителем n .

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



RSA: простые числа

- Мы тут всё умеем делать, кроме одного: как искать простые числа?
- Если проверять n на простоту, деля на все числа до \sqrt{n} , ишак умрёт первым.
- Нам поможет малая теорема Ферма: для простого p и любого $0 < a < p$

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

- Как она может нам помочь?

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



RSA: простые числа

- Тест Миллера-Рабина: выразим $n - 1 = 2^b c$, деля пополам.
- Теперь будем брать случайные a и вычислять сначала a^c , а потом последовательно возводить в квадрат.
- Если $a^c \not\equiv 1 \pmod{n}$, но $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, значит, на каком-то шаге мы нашли число, которое не сравнимо с 1, а его квадрат — сравним.
- Если это число не сравнимо с -1 , то мы нашли нетривиальный квадратный корень из 1; следовательно, n составное.
- Этот алгоритм для составных n выявляет этот факт с вероятностью $\frac{3}{4}$ (по a).
- Ту же идею можно использовать так, чтобы получился алгоритм вычисления квадратного корня не из 1, а из произвольного числа (упражнение).

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом

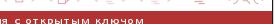


RSA: о стойкости

- Иначе говоря, разложение n на множители вычислительно эквивалентно тому, чтобы найти секретный ключ d в криптосистеме RSA.
- Но на самом деле врагу не надо искать d , ему надо раскодировать сообщение.
- RSA problem: по данным n , e и с найти такое m , что $m^e \equiv c \pmod{n}$.
- То есть вычислить корень e -й степени по составному модулю n .
- Считается, что эта задача тоже вычислительно сложна, но не известно, эквивалентна ли она разложению n на множители.
- Теперь перейдём к более конкретным проблемам RSA.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



RSA: о стойкости

- Какие должны быть простые числа p и q ?
- Во-первых, p и q не должны быть слишком маленькими (примерно одной длины в битах), иначе быстрые алгоритмы станут ещё быстрее.
- Но, во-вторых, p и q не должны быть слишком близки друг к другу; иначе можно перебирать числа около \sqrt{p} .
- Сильные простые числа (strong primes): p — сильное простое, если
 - у $p - 1$ есть большой простой делитель r ;
 - у $p + 1$ есть большой простой делитель;
 - у $p - 1$ есть большой простой делитель.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



RSA: о стойкости

- Пусть Алиса послала три одинаковых письма m трём друзьям с модулями n_1 , n_2 и n_3 и публичными ключами $e = 3$.
- Тогда перехвативший сообщения враг знает про сообщение величины $m^3 \pmod{n_1}$, $m^3 \pmod{n_2}$ и $m^3 \pmod{n_3}$.
- Он может по китайской теореме об остатках вычислить $m^3 \pmod{n_1 n_2 n_3}$.
- Но $m^3 < n_1 n_2 n_3$. Значит, он просто получил настоящее m^3 , и ему остаётся только взять обычный (не дискретный) кубический корень.
- Значит, сообщения нужно дополнять случайными величинами, чтобы не посыпать одно и то же.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



RSA: о стойкости

- Замечание: во всех алгоритмах с публичным ключом враг может сам кодировать.
- Значит, если он может перебрать все возможные сообщения, он может найти m .
- Поэтому нужно использовать salt (случайное число, дописываемое к сообщению).

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



RSA: о стойкости

- Какой выбирать e ? Оказывается, что стойкость RSA от e не зависит.
- Поэтому часто выбирают $e = 3$ или $e = 65537$, чтобы легче было кодировать (2 и 17 умножений соответственно).
- Т.е. можно просто выбрать такие p и q , чтобы $(p - 1)(q - 1)$ не делилось на 3, а потом взять $e = 3$.
- Но при этом есть проблема. Представим, что Алиса послала одно и то же письмо троим друзьям...
- Что здесь будет не так?

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



RSA: о стойкости

- Ещё проще: по тому же принципу, нельзя выбирать такие m , что $m^e < n$, иначе можно просто подсчитать обычный корень.
- Значит, для $e = 3$ нужно дописывать что-то спереди сообщения.
- Реальные протоколы это и делают.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



RSA: о стойкости

- Далее: представим, что p выбирает какой-нибудь сервер и раздаёт его своим пользователям.
- Это заманчиво, потому что искать хорошие p и q не так легко.
- Почему это не сработает?

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



RSA: о стойкости

- Далее: представим, что p выбирает какой-нибудь сервер и раздаёт его своим пользователям.
- Это заманчиво, потому что искать хорошие p и q не так легко.
- Почему это не сработает?
- Потому что тогда любой пользователь сможет разложить n на множители и прочесть сообщения всех остальных пользователей. Число n должно быть у каждого своё.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



RSA против adaptive chosen ciphertext

- RSA *гомоморфна*, т.е. код сообщения $m_1 m_2$ — это $c_1 c_2$.
- Поэтому против adaptive chosen ciphertext RSA бессильна: получив c , Чарли выбирает случайное число r и спрашивает Алису про $c' = cr^e \pmod{n}$.
- Ответ Алисы — это mr , нужно только разделить на r .
- Как с этим бороться на практике?

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Идея

- RSA основана на разложении чисел.
- Но взлом RSA (RSA problem) не эквивалентен разложению n ; по крайней мере, мы об этом не знаем.
- Можно ли придумать систему, взлом которой будет доказуемо эквивалентен разложению большого числа на простые множители? На чём может быть основана такая система?

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Chosen ciphertext атаки

- Мы говорили об атаках видов ciphertext only, known plaintext и chosen plaintext.
- В криптографии с открытым ключом chosen plaintext доступен всегда, а приходится рассматривать и ещё более страшные атаки.
- Chosen ciphertext: Чарли выбирает несколько шифров и просит Алису их расшифровать. Потом Чарли достаётся кодированное сообщение c , и он пытается его расшифровать сам.
- Adaptive chosen ciphertext: Чарли сначала получает c , а потом может спросить Алису про несколько шифров; единственное ограничение — Чарли не может спрашивать про сам шифр c .

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



RSA против adaptive chosen ciphertext

- RSA *гомоморфна*, т.е. код сообщения $m_1 m_2$ — это $c_1 c_2$.
- Поэтому против adaptive chosen ciphertext RSA бессильна: получив c , Чарли выбирает случайное число r и спрашивает Алису про $c' = cr^e \pmod{n}$.
- Ответ Алисы — это mr , нужно только разделить на r .
- Как с этим бороться на практике?
- Например, можно по запросам всяких там Чарли расшифровывать сообщения только определённого вида, потому что Чарли c' будет расшифровываться в какую-то случайную строчку; Алиса не должна по запросу расшифровывать нелегитимные сообщения.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Идея

- RSA основана на разложении чисел.
- Но взлом RSA (RSA problem) не эквивалентен разложению n ; по крайней мере, мы об этом не знаем.
- Можно ли придумать систему, взлом которой будет доказуемо эквивалентен разложению большого числа на простые множители? На чём может быть основана такая система?
- На задаче вычисления квадратного корня.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Криптосистема Рабина: ключи

- Алгоритм порождения ключей.

- Сгенерировать два больших простых числа p и q (как и в RSA, лучше сильных).
- Вычислить $n = pq$.
- Публичный ключ — n , секретный — (p, q) .

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Криптосистема Рабина: о стойкости

- Задача, стоящая перед пассивным врагом, — это в точности задача вычисления квадратного корня.
- Она эквивалентна разложению n на множители.
- Т.е. мы построили систему, взлом которой доказуемо сводится к решению задачи разложения.
- Это криптографы называют *provable security*.
- Криптосистема Рабина подвержена тем же атакам, что RSA, если они упрощают разложение n ; поэтому надо выбирать стойкие числа и т.п.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Криптосистема Рабина: о стойкости

- Можно просто потребовать, чтобы сообщение содержало какие-нибудь особенности.
- Например, определённая часть сообщения должна быть повторена два раза.
- Убиваем двух зайцев. Во-первых, решается проблема с атакой: теперь с подавляющей вероятностью врагу либо ничего не скажут, либо (если он будет подавать правильно оформленные сообщения) скажут его же сообщение.
- Во-вторых, решается проблема того, какой из четырёх корней выбрать Алисе.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Криптосистема Рабина: [де]кодирование

- Алгоритм кодирования (вход: публичный ключ n , сообщение m).

- Представить m как число, $0 \leq m \leq n - 1$.
- Вычислить $c = m^2 \pmod{n}$.

- Алгоритм кодирования (вход: секретный ключ (p, q) , шифр c).

- Вычислить четыре квадратных корня из c (алгоритм был выше).
- Как-нибудь из них выбрать.

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Криптосистема Рабина: о стойкости

- Но против chosen ciphertext дела плохи.

- Враг может использовать криптосистему как оракула в том самом сведении и разложить n . Напомним:

- враг выбирает случайное число m , подаёт системе m^2 ;
- система выдаёт какой-то квадратный корень;
- поскольку система не знает m , с вероятностью $\frac{1}{2}$ враг получает другой квадратный корень и раскладывает n на множители.

- Как с этим справиться?

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом



Спасибо за внимание!

- Lecture notes и слайды будут появляться на моей homepage:

<http://logic.pdmi.ras.ru/~sergey/>

- Присылайте любые замечания, решения упражнений, новые численные примеры и прочее по адресам:

sergey@logic.pdmi.ras.ru, snikolenko@gmail.com

- Заходите в ЖЖ [smartnik](#).

Сергей Николенко

Криптография с открытым ключом

