# ОЧЕНЬ КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

Сергей Николенко
АФТУ РАН, весна 2010 г. (II семестр)

## 1. Типы и топология Стоуна

**Определение 1.** Пусть $p$ — множество $L_A$-формул со свободными переменными $v_1, \dots, v_n$. $p$ называется $n$-*типом*, если $p \cup \mathrm{th}_A(\mathcal{M})$ выполнимо. $n$-тип называется *полным*, если для любой $L_A$-формулы $\varphi$ либо $\varphi \in p$, либо $\neg\varphi \in p$. Множество полных $n$-типов обозначается $S_n^{\mathcal{M}}(A)$.

**Определение 2.** Вектор $a_1, \dots, a_n \in A$ *реализует* $n$-тип $p$, если $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ для всех формул $\varphi \in p$; $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) = \{\varphi \mid \varphi(\bar{v}) - L_A\text{-формула}, \mathcal{M} \models \varphi(a)\}$.

**Теорема 3.** *Пусть $\mathcal{M}$ – $L$-структура, $A \subseteq M$, $p$ – $n$-тип. Тогда существует элементарное расширение $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$, в котором тип $p$ реализуется.*

**Следствие 4.** $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ тогда и только тогда, когда существует элементарное расширение $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ и $\bar{a} \in N$, для которого $p = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{a}/A)$.

**Лемма 5.** Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – $L$-структуры, $B \subseteq \mathcal{M}$, $f : B \to \mathcal{N}$ – частично элементарное отображение. Если $b \in \mathcal{M}$, то есть элементарное расширение $\mathcal{N}_1 \succ \mathcal{N}$ и частично элементарное отображение $g : B \cup \{b\} \to \mathcal{N}_1$, продолжающее $f$.

**Следствие 6.** Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – $L$-структуры, $B \subseteq \mathcal{M}$, $f : B \to \mathcal{N}$ – частично элементарное отображение. Тогда существует элементарное расширение $N' \succ \mathcal{N}$ и элементарное вложение $g : \mathcal{M} \to \mathcal{N}'$, продолжающее $f$.

**Теорема 7.** *Пусть $\mathcal{M}$ – $L$-структура, $A \subseteq M$, $\bar{a}, \bar{b} \in M^n$, и $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{b}/A)$. Тогда существует элементарное расширение $N \succ M$ и автоморфизм $\sigma : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, для которого $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$.*

**Определение 8.** Рассмотрим пространство $S_n^{\mathcal{M}}(A)$. Обозначим $[\varphi(\bar{v})] = \left\{p \in S_n^{\mathcal{M}}(A) \mid \varphi \in p\right\}$. *Топология Стоуна* на $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ задаётся базовыми открытыми множествами $[\varphi]$ для всех $L_A$-формул $\varphi(v_1, \dots, v_n)$.

**Теорема 9.**
1. *$S_n^{\mathcal{M}}(A)$ компактно в топологии Стоуна.*
2. *$S_n^{\mathcal{M}}(A)$ полностью несвязно, т.е. для любых двух типов $p \neq q$ существует открытозамкнутое множество, их разделяющее.*

**Предложение 10.**
1. Пусть $A \subseteq B \subseteq M$, $p \in S_n^{\mathcal{M}}(B)$. Рассмотрим $p|_A$ – множество $L_A$-формул в $p$. Тогда $p|_A \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$, и $p \mapsto p|_A$ – непрерывное отображение $S_n^{\mathcal{M}}(B) \to S_n^{\mathcal{M}}(A)$.
2. Пусть $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ – элементарное вложение, и $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$. Тогда $f(p) = \{\varphi(\bar{v}, f(\bar{a})) : \varphi(\bar{v}, \bar{a}) \in p\} \in S_n^{\mathcal{M}}(f(A))$, и $p \mapsto f(p)$ непрерывно.
3. Если $f : A \to \mathcal{N}$ – частично элементарное отображение, то $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ гомеоморфно $S_n^{\mathcal{M}}(f(A))$.

**Определение 11.** Тип $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ называется *изолированным*, если $\{p\} \subseteq S_n^{\mathcal{M}}(A)$ – открытое подмножество.

**Предложение 12.** Следующие утверждения эквивалентны.

1. $p$ изолирован.
2. $\{p\} = [\varphi(\bar{v})]$ для некоторой $L_A$-формулы $\varphi(\bar{v})$ ($\varphi$ *изолирует* $p$).

(3) Существует такая $L_A$-формула $\varphi(\bar v) \in p$, что для всех $L_A$-формул $\psi(\bar v)$ $\psi(\bar v) \in p$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Th}_A(\mathcal{M}) \models \varphi(\bar v) \to \psi(\bar v)$.

**Теорема 13.** *Пусть* $L$ *– счётный язык,* $T$ *–* $L$*-теория,* $p$ *– неизолированный* $n$*-тип над* $\emptyset$*. Тогда есть счётная модель* $\mathcal{M} \models T$*, не реализующая* $p$*.*

## 2. Теория Рамсея и недоказуемость

**Определение 14.** Пусть $X$ – множество, $\kappa, \lambda$ – кардиналы. Тогда $[X]^\kappa$ – набор $\kappa$-элементных подмножеств $X$, $f : [X]^\kappa \to \lambda$ – *разбиение* множества $[X]^\lambda$ на $\lambda$ частей, а подмножество $Y \subseteq X$ называется *однородным* для разбиения $f$, если существует такое $\alpha < \lambda$, что $f(A) = \alpha$ для всех $A \in [Y]^\kappa$ ($f$ постоянна на $Y$). Будем писать $\kappa \to (\eta)^\mu_\lambda$, если для любого $|X| \geq \kappa$ и любого разбиения $f : [X]^\mu \to \lambda$ существует однородное для $f$ подмножество $Y \subseteq X$ размера $|Y| \geq \eta$.

**Теорема 15** (Рамсея бесконечная). *Для любых* $k, n < \omega$ $\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_k$.

**Теорема 16** (Рамсея конечная). *Для любых* $k, n, m < \omega$ *существует такое* $l < \omega$*, что* $l \to (m)^n_k$.

**Теорема 17** (принцип Пэриса–Хэррингтона PH*). *Для любых* $k, n, m < \omega$ *существует такое* $l < \omega$*, что для любой функции* $f : [l]^n \to k$ *существует однородное* $Y \subseteq l$*:* $|Y| \geq m$*, и* $|Y| > n(2^{n \cdot \min H} + 1)$.

**Определение 18.** Пусть $I$ – бесконечное множество индексов, и $X = \{x_i, i \in I\} \subset \mathcal{M}$, $x_i \neq x_j$. $X$ – *неразличимые элементы*, если $\forall i_1 \dots i_m j_1 \dots j_m$ $\mathcal{M} \models \varphi(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \leftrightarrow \varphi(x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$.

**Определение 19.** Пусть $(I, <)$ – бесконечный линейный порядок, и $X = \{x_i, i \in I\} \subset \mathcal{M}$, $x_i \neq x_j$. $X$ – *упорядоченно неразличимые элементы*, если $\forall i_1 < \dots < i_m, j_1 < \dots < j_m$ $\mathcal{M} \models \varphi(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \leftrightarrow \varphi(x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$.

**Теорема 20.** *Пусть* $T$ *– теория с бесконечными моделями. Для любого бесконечного линейного порядка* $(I, <)$ *существует модель* $\mathcal{M} \models T$*, в которой есть разные элементы* $(x_i, i \in I) \subset M$*, образующие упорядоченно неразличимую последовательность.*

**Определение 21.** $X = \{x_i, i \in I\} \subseteq \mathcal{M}$ – *последовательность диагонально неразличимых элементов* для множества формул $\Gamma$, если для любой формулы $\varphi(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n) \in \Gamma$ и любых $x_0 < x_1 < \dots < x_n, x_0 < y_1 < \dots < y_n \in X$, $a_1, \dots, a_m < x_0$, $a_i \in M$, $\mathcal{M} \models \varphi(\bar a, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi(\bar a, y_1, \dots, y_n)$.

**Лемма 22.** Пусть $\mathcal{M}$ – модель PA, $x_0 < x_1 < \dots$ – последовательность диагонально неразличимых элементов для множества формул $\Delta_0$. Рассмотрим $N = \{y \in M : y < x_i$ для некоторого $i < \omega\}$. Тогда $N$ замкнуто относительно сложения и умножения, $\mathcal{N}$ – подструктура $\mathcal{M}$, и $\mathcal{N}$ – модель PA.

**Теорема 23.** *Принцип Пэриса–Хэррингтона PH* недоказуем в арифметике Пеано.*

## 3. Простые модели, однородные модели и стабильные теории

**Определение 24.** Модель $\mathcal{M} \models T$ *простая*, если для любой модели $\mathcal{N} \models T$ существует элементарное вложение $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

**Определение 25.** Модель $\mathcal{M} \models T$ *атомарная*, если все типы $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar a)$ для всех $\bar a \in M^n$ изолированы.

**Теорема 26.** *Пусть* $L$ *– счётный язык,* $T$ *– полная теория с бесконечными моделями. Тогда* $\mathcal{M} \models T$ *проста iff* $\mathcal{M}$ *счётна и атомарна.*

**Теорема 27.** *Пусть* $L$ *– счётный язык,* $T$ *– полная* $L$*-теория с бесконечными моделями. Следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *У* $T$ *есть простая модель.*

(2) *У $T$ есть атомарная модель.*
(3) *Изолированные типы плотны в $S_n(T)$ для всех $n$.*

**Теорема 28.** *Пусть $L$ – счётный язык, $T$ – полная $L$-теория с бесконечными моделями, $\mathcal{M} \models T$, $A \subseteq M$ – счётное подмножество. Если $\left|S_n^{\mathcal{M}}(A)\right| < 2^{\aleph_0}$, то:*
(1) *изолированные типы плотны в $S_n^{\mathcal{M}}(A)$;*
(2) $\left|S_n^{\mathcal{M}}(A)\right| \leq \aleph_0$.

**Определение 29.** Модель $\mathcal{M} \models T$ $\lambda$-*однородна*, если для любого подмножества $A \subseteq M$: $|A| < \lambda$ любое частично элементарное отображение $f : A \to M$ можно продолжить на ещё одну точку $a \in M$: $\exists f^* \supseteq f$, $f^* : A \cup \{a\} \to M$. Модель называется *однородной*, если она $|M|$-однородна.

**Предложение 30.** Если $\mathcal{M} \models T$ однородна, $A \subset M$, $|A| < |M|$, $f : A \to M$ – частично элементарное отображение, то есть автоморфизм $\sigma \supseteq f$, $\sigma : M \to M$. В частности, если $\mathcal{M}$ однородна, и $\bar{a}, \bar{b} \in M^n$ реализуют один и тот же тип, то есть автоморфизм $\sigma : M \to M$, для которого $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$.

**Лемма 31.** Если $\mathcal{M}$ атомарна, то $\mathcal{M}$ $\aleph_0$-однородна (счётные атомарные модели однородны).

**Теорема 32.** *Пусть $L$ – счётный язык, $T$ – полная $L$-теория, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – счётные однородные модели $T$, и $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ реализуют одни и те же типы в $S_n(T)$ для всех $n < \omega$. Тогда $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.*

**Следствие 33.** Пусть $L$ – счётный язык, $T$ – полная $L$-теория с бесконечными моделями, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – две простые модели $T$. Тогда $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

**Определение 34.** Модель $\mathcal{M} \models T$ *проста над* $A \subseteq M$, если для любой модели $\mathcal{N} \models T$ любое частично элементарное отображение $f : A \to \mathcal{N}$ можно продолжить до элементарного вложения $f^* : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, $f^* \subseteq f$.

**Определение 35.** Пусть $L$ – счётный язык, $T$ – полная $L$-теория, $\lambda$ – бесконечный кардинал. Теория $T$ $\lambda$-*стабильна*, если для любой модели $\mathcal{M} \models T$ и любого подмножества $A \subseteq M$, $|A| = \lambda$ множество типов над $A$ имеет ту же мощность: $|S_n^{\mathcal{M}}(A)| = \lambda$.

**Предложение 36.** Пусть $L$ – счётный язык, $T$ – полная $L$-теория. Если $T$ $\omega$-стабильна, то $T$ $\lambda$-стабильна для всех бесконечных $\lambda$.

**Предложение 37.** Пусть $L$ – счётный язык, $T$ – полная $L$-теория. Если $T$ $\omega$-стабильна, то для всех $\mathcal{M} \models T$, $A \subseteq M$, изолированные типы плотны в $S_n^{\mathcal{M}}(A)$.

**Теорема 38.** *Пусть $L$ – счётный язык, $T$ – полная $L$-теория, $T$ $\omega$-стабильна, $\mathcal{M} \models T$. Тогда существует модель $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$, такая, что $\mathcal{M}_0$ проста над $A$. Более того, можно выбрать $\mathcal{M}_0$ так, что любая точка $a \in M_0$ реализует изолированный тип над $A$.*

## 4. Насыщенные и универсальные модели

**Определение 39.** Пусть $\lambda$ – бесконечный кардинал. Модель $\mathcal{M} \models T$ $\lambda$-*насыщенная*, если для любого подмножества $A \subseteq M$, $|A| < \lambda$, если $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$, то $p$ реализуется в $\mathcal{M}$. Модель *насыщенная*, если она $|M|$-насыщенная.

**Предложение 40.** Пусть $\lambda$ – бесконечный кардинал. Следующие утверждения эквивалентны.
(1) $\mathcal{M}$ $\lambda$-насыщенная.
(2) Для любых $A \subseteq M$, $|A| < \lambda$, и (возможно, неполного) $n$-типа $p$ над $A$ $p$ реализуется в $\mathcal{M}$.
(3) Для любых $A \subseteq M$, $|A| < \lambda$, и $p \in S_1^{\mathcal{M}}(A)$ $p$ реализуется в $\mathcal{M}$.

**Теорема 41.** *Если модель $\lambda$-насыщенная, то она $\lambda$-однородная.*

**Предложение 42.** Пусть $\mathcal{M} \models T$. Тогда $\mathcal{M}$ $\aleph_0$-насыщенная iff $\mathcal{M}$ $\aleph_0$ однородная, и $\mathcal{M}$ реализует все типы в $S_n(T)$.

**Следствие 43.** Две счётные насыщенные модели одной и той же теории изоморфны.

**Предложение 44.** Для любой $\mathcal{M} \models \mathsf{T}$ если $\aleph_0$-однородная модель $\mathcal{N}$: $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

**Теорема 45.** *У теории* $\mathsf{T}$ *есть счётная насыщенная модель iff* $|S_n(\mathsf{T})| \leq \aleph_0$ *для всех* $n$.

**Следствие 46.** (1) Если у $\mathsf{T}$ есть счётная насыщенная модель, то у $\mathsf{T}$ есть простая модель.
  (2) Если у $\mathsf{T}$ меньше $2^{\aleph_0}$ неизоморфных счётных моделей, то у $\mathsf{T}$ есть счётная насыщенная модель и простая модель.

**Определение 47.** Модель $\mathcal{M} \models \mathsf{T}$ $\lambda$-*универсальна*, если для любой модели $\mathcal{N} \models \mathsf{T}$, $|N| < \lambda$, есть элементарное вложение $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$. Модель $\mathcal{M}$ *универсальна*, если она $|M|$-универсальна.

**Лемма 48.** Пусть $\lambda \geq \aleph_0$. Если $\mathcal{M}$ $\lambda$-насыщенная, то она $\lambda^+$-универсальная.

**Теорема 49.** *Пусть* $\lambda \geq \aleph_0$*. Следующие утверждения эквивалентны.*
  (1) $\mathcal{M}$ $\lambda$-*насыщенная.*
  (2) $\mathcal{M}$ $\lambda$-*однородная и* $\lambda^+$-*универсальная.*
  (3) *(только для* $\lambda \geq \aleph_1$*)* $\mathcal{M}$ $\lambda$-*однородная и* $\lambda$-*универсальная.*

**Следствие 50.** $\mathcal{M}$ насыщенная iff $\mathcal{M}$ однородная и универсальная.

**Теорема 51.** *Если* $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models \mathsf{T}$*,* $\mathcal{M}$ *и* $\mathcal{N}$ *– насыщенные мощности* $\lambda$*, то* $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$*.*

**Лемма 52.** Пусть $\mathcal{N} \models \mathsf{T}$ $\lambda$-однородна, $\lambda \leq |N|$, и $\mathcal{M} \models \mathsf{T}$ такова, что любой тип из $S_n(\mathsf{T})$, реализуемый в $\mathcal{M}$, реализуется и в $\mathcal{N}$ для любого $n < \omega$. Тогда, если $A \subseteq M$, $|A| \leq \lambda$, то есть частично элементарное отображение $f : A \to \mathcal{N}$.

**Следствие 53.** Если $\mathcal{M} \models \mathsf{T}$ $\lambda$-однородна и реализует все типы в $S_n(\mathsf{T})$, $n < \omega$, то $\mathcal{M}$ $\lambda$-насыщенна.

**Теорема 54.** *Если* $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models \mathsf{T}$ *– однородные, одинаковой мощности, и реализуют одни и те же типы в* $S_n(\mathcal{M})$*, то* $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$*.*

**Следствие 55.** (1) Неизоморфных однородных моделей $\mathsf{T}$ мощности $\lambda$ не более чем $2^{2^{\aleph_0}}$.
  (2) Если у $\mathsf{T}$ есть счётная насыщенная модель, то неизоморфных однородных моделей мощности $\lambda$ у неё не более чем $2^{\aleph_0}$.

## 5. $(\lambda, \mu)$-модели и пары Вота

**Определение 56.** Пусть $\lambda > \mu \geq \aleph_0$. Модель $\mathcal{M}$ $L$-теории $\mathsf{T}$ называется $(\lambda, \mu)$-*моделью*, если $|M| = \lambda$, и для некоторой формулы $\varphi(\bar{v})$ $|\varphi(\mathcal{M})| = |\{\bar{a} \in M^n : \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})\}| = \mu$.

**Определение 57.** Пара моделей $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ называется *парой Вота*, если $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, $M \neq N$, и если $L_M$-формула $\varphi$, для которой $\varphi(\mathcal{M})$ бесконечно, а $\varphi(\mathcal{N}) = \varphi(\mathcal{M})$.

**Лемма 58.** Если у теории $\mathsf{T}$ есть $(\lambda, \mu)$-модель для $\lambda > \mu \geq \aleph_0$, то у неё есть и пара Вота $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$.

**Лемма 59.** Если у теории $\mathsf{T}$ есть пара Вота $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$, у неё есть и пара Вота $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0)$ со счётным $N_0$.

**Лемма 60.** Пусть $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{N}_0$ – счётные модели теории $\mathsf{T}$. Можно найти такие модели $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$, что $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0) \prec (\mathcal{N}, \mathcal{M})$, и $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ счётные, однородные и реализуют одни и те же типы в $S_n(\mathsf{T})$ (т.е., по Теореме 32, $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$).

**Теорема 61** (Вота)**.** *Если у теории* $\mathsf{T}$ *есть* $(\lambda, \mu)$-*модель для* $\lambda > \mu \geq \aleph_0$*, то у* $\mathsf{T}$ *есть и* $(\aleph_1, \aleph_0)$-*модель.*

**Следствие 62.** Если $\mathsf{T}$ $\aleph_1$-категорична, то у неё нет пар Вота и $(\lambda, \mu)$-моделей, $\lambda > \mu \geq \aleph_0$.

**Лемма 63.** Пусть $\mathsf{T}$ $\omega$-стабильна, $\mathcal{M} \models \mathsf{T}$, $|M| \geq \aleph_1$. Тогда существует собственное элементарное расширение $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$, такое, что если $\Gamma(\bar{v})$ – счётный тип над $M$, реализуемый в $\mathcal{N}$, то $\Gamma(\bar{v})$ реализуем и в $\mathcal{M}$.

**Теорема 64.** *Пусть* $T$ $\omega$*-стабильна, и у неё есть* $(\aleph_1, \aleph_0)$*-модель. Тогда для любого* $\lambda > \aleph_1$ *существует* $(\lambda, \aleph_0)$*-модель* $T$.

## 6. Модели Эренфойхта-Мостовского

**Определение 65.** Пусть $T^*$ – $L^*$-теория со встроенными сколемовскими функциями, $\mathcal{M} \models T^*$. Тогда для $X \subseteq M$ $\mathcal{H}(X)$ – подструктура $\mathcal{M}$, порождённая $X$ – называется *сколемовской оболочкой* $X$. Модели вида $\mathcal{H}(X)$ – *модели Эренфойхта-Мостовского.*

**Лемма 66.** Пусть $T^*$ – $L^*$-теория со встроенными сколемовскими функциями, $\mathcal{M} \models T^*$, $X \subseteq M$ – бесконечная последовательность упорядоченно неразличимых элементов. Тогда любая перестановка $\tau : X \to X$, сохраняющая порядок, продолжается до автоморфизма $\sigma : \mathcal{H}(I) \to \mathcal{H}(I)$, $\sigma \supseteq \tau$.

**Определение 67.** Пусть $X = (x_i, i \in I)$ – бесконечная последовательность упорядоченно неразличимых элементов в $\mathcal{M}$. *Тип неразличимых элементов* – это множество формул

$$\mathrm{tp}(X) = \{\varphi(v_1, \ldots, v_n) : \mathcal{M} \models \varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}),\ i_1 < \ldots < i_n\}.$$

**Лемма 68.** Пусть $T^*$ – $L^*$-теория со встроенными сколемовскими функциями, $\mathcal{M} \models T^*$, $X = (x_i, i \in I) \subseteq M$ – бесконечная последовательность упорядоченно неразличимых элементов. Тогда для любого бесконечного линейного порядка $(J, <)$ существует модель $\mathcal{N} \models T$ и последовательность упорядоченно неразличимых элементов $Y = (y_j, j \in J) \subseteq \mathcal{N}$, для которой $\mathrm{tp}(Y) = \mathrm{tp}(X)$.

**Лемма 69.** Пусть $T^*$ – $L^*$-теория со встроенными сколемовскими функциями, $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T^*$, $X = (x_i, i \in I) \subseteq M$ и $Y = (y_j, j \in J) \subseteq N$ – бесконечные последовательности упорядоченно неразличимых элементов, и $\mathrm{tp}(I) = \mathrm{tp}(J)$. Тогда любое сохраняющее порядок отображение $\tau : I \to J$ продолжается до элементарного вложения $\sigma : \mathcal{H}(I) \to \mathcal{H}(J)$.

**Следствие 70.** Пусть $T$ – $L$-теория с бесконечными моделями. Тогда для любого $\lambda \geq |L| + \aleph_0$ существует модель $\mathcal{N} \models T$, $|N| = \lambda$, у которой есть $2^\lambda$ автоморфизмов.

**Следствие 71.** Пусть $T^*$ – $L^*$-теория со встроенными сколемовскими функциями, $\mathcal{M} \models T^*$, $X = (x_i, i \in I) \subseteq M$ – бесконечная последовательность упорядоченно неразличимых элементов, и $\mathcal{M}$ не реализует тип $p$ над $\emptyset$. Тогда есть сколь угодно большие модели $T^*$, не реализующие $p$.

**Теорема 72.** *Пусть* $L$ *– счётный язык,* $T$ *–* $L$*-теория с бесконечными моделями. Для любого* $\lambda \geq \aleph_0$ *существует модель* $\mathcal{M} \models T^*$, $|M| = \lambda$, *для которой, если* $A \subseteq M$, *то* $M$ *реализует не более* $|A| + \aleph_0$ *типов в* $S_n^{\mathcal{M}}(A)$.

**Следствие 73.** Пусть $L$ – счётный язык, $T$ – $L$-теория с бесконечными моделями, $\lambda \geq \aleph_1$. Если $T$ $\lambda$-категорична, то $T$ $\omega$-стабильна.

**Следствие 74.** Пусть $L$ – счётный язык, $T$ – $L$-теория с бесконечными моделями, $\lambda \geq \aleph_1$. Если $T$ $\lambda$-категорична, то у $T$ нет пар Вота и, следовательно, нет $(\lambda, \mu)$-моделей для $\lambda > \mu \geq \aleph_0$.

## 7. Минимальные множества и теории

**Определение 75.** Рассмотрим полную теорию $T$ над счётным языком $L$, $\mathcal{M} \models T$ (здесь и далее в этом разделе). Пусть $D \subseteq M^n$ – бесконечное выразимое множество. $D$ *минимально в* $\mathcal{M}$, если для любого выразимого $Y \subseteq D$ либо $Y$ конечно, либо $D \subseteq Y$ конечно. Формула $\varphi(\bar{v}, \bar{a})$, выражающая $D$ – *минимальная* формула. $D$ *сильно минимально*, если $\varphi$ минимальна и в любом элементарном расширении $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$. Теория $T$ *сильно минимальна*, если формула $v = v$ сильно минимальна (т.е. $M$ минимально для любой модели $\mathcal{M} \models T$).

**Определение 76.** Элемент $b$ называется *алгебраическим над* $A$, если есть формула $\varphi(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in A$, для которой $\mathcal{M} \models \varphi(b, \bar{a})$, и $\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})$ конечно. *Алгебраическое замыкание* множества $A \subseteq D$ – это $\mathrm{acl}_D(A) = \left\{\bar{b} \in D :\ b \text{ алгебраический над } A\right\}$.

**Лемма 77** (принцип обмена)**.** Пусть $D \subseteq M$ – сильно минимальное, $A \subseteq D$, $a, b \in D$. Если $\bar{a} \in \operatorname{acl}(A \cup \{b\}) \setminus \operatorname{acl}(A)$, то $b \in \operatorname{acl}(A \cup \{a\})$.

**Определение 78.** Пусть $\mathcal{M} \models T$, и $D$ – сильно минимальное множество. $A \subseteq D$ *независимо*, если $a \notin \operatorname{acl}(A \setminus \{a\}$ для любого $a \in A$. $A$ *независимо над* $C \subseteq D$, если $a \notin \operatorname{acl}(C \cup A \setminus \{a\}$ для любого $a \in A$.

**Лемма 79.** Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$, $\varphi(v)$ – сильно минимальная формула с параметрами из $A$, где $A = \emptyset$ или $A \subseteq \mathcal{M}_0$, где $\mathcal{M}_0 \models T$, $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$, $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{N}$. Если $a_1, \dots, a_n \in \varphi(\mathcal{M})$ независимы над $A$, и $b_1, \dots, b_n \in \varphi(\mathcal{M})$ независимы над $A$, то $\operatorname{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) = \operatorname{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b}/A)$.

**Следствие 80.** Если $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$, $A$ и $\varphi(v)$ – как в условии Леммы 79, $B$ – бесконечное подмножество $\varphi(\mathcal{M})$, независимое над $A$, а $C$ – бесконечное подмножество $\varphi(\mathcal{N})$, независимое над $A$. Тогда $B$ и $C$ – бесконечные множества неразличимых элементов одного типа над $A$.

**Определение 81.** $A$ – *базис* для $Y \subseteq D$, если $A \subseteq Y$ независимо, и $\operatorname{acl}(A) = \operatorname{acl}(Y)$.

**Лемма 82.** Пусть $A, B \subseteq D$ – независимые множества, и $A \subseteq \operatorname{acl}(B)$. Тогда:
(1) Если $A_0 \subseteq A$, $B_0 \subseteq B$, $A_0 \cup B_0$ – базис $\operatorname{acl}(B)$, и $a \in A \setminus A_0$, то существует $b \in B_0$, для которого $A_0 \cup \{a\} \cup (\{B_0 \setminus \{b\})$ – базис $\operatorname{acl}(B)$.
(2) $|A| \leq |B|$.
(3) Если $A$ и $B$ – базисы $Y \subseteq D$, то $|A| = |B|$.

**Определение 83.** Пусть $Y \subseteq D$. *Размерность* $\dim Y$ – это мощность базиса $Y$.

**Теорема 84.** *Пусть $T$ – сильно минимальная теория. Если $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$, то $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ iff* $\dim(M) = \dim(N)$.

**Следствие 85.** Если $T$ – сильно минимальная теория, то $T$ $\lambda$-категорична для $\lambda \geq \aleph_1$, и $I(T, \aleph_0) \leq \aleph_0$.

## 8. Классификация несчётно категоричных теорий

**Лемма 86.** Пусть $T$ – $\omega$-стабильная теория.
(1) Если $\mathcal{M} \models T$, то в $\mathcal{M}$ есть минимальная формула.
(2) Если $\mathcal{M} \models T$ – $\aleph_0$-насыщенная, и $\varphi(\bar{v}, \bar{a})$ минимальна в $\mathcal{M}$, то $\varphi(\bar{v}, \bar{a})$ сильно минимальная.

**Лемма 87.** Пусть $T$ – $L$-теория без пар Вота, $\mathcal{M} \models T$, и $\varphi(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m)$ – формула с параметрами из $\mathcal{M}$. Тогда существует число $n$, для которого, если $\bar{a} \in \mathcal{M}$ и $|\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})| \geq n$, то $|\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})|$ бесконечно.

**Следствие 88.** Если у $T$ нет пар Вота, то любая минимальная формула сильно минимальна.

**Следствие 89.** Если $T$ $\omega$-стабильна и без пар Вота, то в любой $\mathcal{M} \models T$ есть сильно минимальная формула над $\mathcal{M}$. В частности, есть сильно минимальная формула с параметрами из $\mathcal{M}_0$ – простой модели $T$.

**Лемма 90.** Если у $T$ нет пар Вота, $\mathcal{M} \models T$, и $X \subseteq M^n$ – бесконечное выразимое множество, то нет строгих элементарных подмоделей $\mathcal{M}$, содержащих $X$. Если, к тому же, $T$ $\omega$-стабильна, то $\mathcal{M}$ – простая над $X$.

**Теорема 91** (классификация несчётно категоричных теорий, Baldwin–Lachlan)**.** *Пусть $T$ – полная теория над счётным языком с бесконечными моделями, $\lambda$ – несчётный кардинал. $T$ $\lambda$-категорична iff $T$ $\omega$-стабильна, и у $T$ нет пар Вота.*

**Следствие 92.** Если $T$ несчётно категорична, то $I(T, \aleph_0) \leq \aleph_0$.

**Лемма 93.** Пусть $T$ – $\omega$-стабильная $L$-теория, $\varphi(v)$ – сильно минимальная $L$-формула без параметров, $\mathcal{M} \models T$, и $\dim(\varphi(\mathcal{M})) = n < \omega$. Тогда для любого $m \geq n$ есть модель $\mathcal{N} \models T$ размерности $\dim(\varphi(\mathcal{N})) = m$.

**Следствие 94.** Если $T$ несчётно категорична, и есть сильно минимальная $L$-формула, то либо $T$ $\aleph_0$-категорична, либо $I(T,\aleph_0)=\aleph_0$.

## 9. Теория множеств и ординалы

**Определение 95.** Аксиоматика Цермело-Френкеля.

**Определение 96.** Частичный порядок $(A,<)$ называется *фундированным*, если любое подмножество $B\subset A$, $B\neq\emptyset$, содержит минимальный элемент. Фундированный линейный порядок называется *полным*, а множество $A$ в таком случае – *вполне упорядоченным.*

**Теорема 97.** *В любой модели ZF следующие утверждения эквивалентны.*

(1) $(A,<)$ *фундирован.*
(2) *В* $A$ *не существует бесконечной строго убывающей последовательности* $x_0>x_1>\dots$.
(3) *Для* $A$ *верна индукция: для любой формулы* $P$

$$\forall x\in A\,(\forall y P(y)\to P(x))\to\forall x\in A P(x).$$

**Определение 98.** Частичные порядки $(X,<_X)$ и $(Y,<_Y)$ *изоморфны*, если существует биекция $f:X\to Y$, сохраняющая порядок. *Начальный отрезок* $(X,<)$ – это подмножество вида $\hat{y}=\{x\in X\mid x<y\}$.

**Определение 99.** Рассмотрим два частичных порядка $(X,<_X)$ и $(Y,<_Y)$.

(1) $(X,<_X)$ и $(Y,<_Y)$ имеют один и тот же *порядковый тип*, если $X\sim Y$.
(2) $(Y,<_Y)$ имеет строго больший *порядковый тип*, чем $(X,<_X)$ $(X\prec Y)$, если для некоторого $y\in Y$ $X\sim\hat{y}$.
(3) Частичный порядок $(Y,<_Y)$ имеет строго меньший *порядковый тип*, чем $(X,<_X)$ $(X\succ Y)$, если для некоторого $x\in X$ $Y\sim\hat{x}$.

**Теорема 100** (Бернштейна)**.** *Если ZF непротиворечива, то для любых двух полных порядков либо* $X$ *и* $Y$ *имеют один и тот же тип, либо* $X\prec Y$*, либо* $X\succ Y$.

**Определение 101.** Множество *транзитивно*, если

$$\forall y\forall z\,(z\in y\wedge y\in x\to z\in x)\,.$$

**Определение 102.** *Ординал* – транзитивное множество, упорядоченное по включению.

**Лемма 103.** (1) Семейство ординалов Ord транзитивно и вполне упорядочено по включению.
(2) Если $\alpha,\beta\in\mathrm{Ord}$, то $(\alpha,\in)\sim(\beta,\in)$ iff $\alpha=\beta$.
(3) $\emptyset$ – ординал, и если $\alpha\in\mathrm{Ord}$ и $\alpha\neq\emptyset$, то $\emptyset\in\alpha$.
(4) Если $\alpha$ – ординал, то $\mathrm{succ}(\alpha)=\alpha\cup\{\alpha\}$ – ординал, и для любого $\beta\in\mathrm{Ord}$ либо $\beta\leq\alpha$, либо $\mathrm{succ}(\alpha)\leq\beta$.
(5) Если $C$ – множество ординалов, то $\delta=\bigcup_{\alpha\in C}\alpha$ – ординал, и $\delta=\sup C$.

**Теорема 104.** *Если ZF непротиворечива, то любой полный порядок изоморфен единственному ординалу.*

**Определение 105.** *Число Хартогса* $h(A)$ множества $A$ – это наименьший ординал, не равномощный никакому подмножеству $A$.

**Теорема 106.** *Для любого* $A$ *существует* $h(A)$.

**Определение 107.** Ординал $\alpha$ *непосредственно следует* за ординалом $\beta$, $\alpha=\beta+1$, если $\alpha=\beta\cup\{\beta\}$. Ординал $\alpha$ – *предельный*, если нет ординала, за которым он следует. Минимальный бесконечный ординал $\omega$ – предельный ординал, которому из предельных предшествует только $\emptyset$.

**Теорема 108** (Трансфинитная индукция)**.** *Пусть* $P(x)$ *– некоторое свойство (формула), и для всех ординалов верно, что если* $P(\beta)$ *для всех* $\beta<\alpha$*, то* $P(\alpha)$*. Тогда* $P(\alpha)$ *верно для всех* $\alpha$.

**Определение 109.** Функция $g$ называется *функцией выбора* для набора множеств $S$, если $g(x) \in x$ для любого $x \in S$.

**Теорема 110** (Цермело)**.** *Множество $A$ может быть вполне упорядочено тогда и только тогда, когда $2^A$ имеет функцию выбора.*

**Теорема 111** (лемма Цорна)**.** *Аксиома выбора эквивалентна следующему утверждению: если любая цепь в частично упорядоченном множестве имеет точную верхнюю грань, то в этом множестве найдётся максимальный элемент.*

## 10. Нестандартный анализ

**Определение 112.** *Фильтр* – это семейство $\mathcal{F}$ подмножеств $\mathbb{N}$ со следующими свойствами.

(1) $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
(2) Если $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, то $\bigcap_i A_i \in \mathcal{F}$.
(3) Если $A \in \mathcal{F}$, и $A \subset B$, то $B \in \mathcal{F}$.
(4) Фильтр называется *свободным*, если он не содержит конечных множеств.
(5) Фильтр $\mathcal{F}$ называется *ультрафильтром*, если $\forall E \subset \mathbb{N}$ либо $\mathcal{E} \in \mathcal{F}$, либо $\mathbb{N} \setminus \mathcal{E} \in \mathcal{F}$.

**Теорема 113.** *Существуют свободные ультрафильтры на $\mathbb{N}$, являющиеся расширениями фильтра кофинитных множеств.*

**Определение 114.** Нестандартное расширение вещественной прямой – это $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ для некоторого ультрафильтра $\mathcal{U}$ из теоремы 113.

**Определение 115.** Число $\delta \in \mathbb{R}^*$ *бесконечно малое*, если $0^* < \delta < r^*$ для любого $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$. Число $\omega \in \mathbb{R}^*$ *бесконечно большое*, если $\omega > r^*$ для любого $r \in \mathbb{R}$ или $\omega < r^*$ для любого $r \in \mathbb{R}$.

**Определение 116.** Для некоторого $x \in \mathbb{R}^*$ рассмотрим множества $D_1 = \{r \in \mathbb{R} \mid r^* < x\}$ и $D_2 = \{r \in \mathbb{R} \mid r^* > x\}$. Они образуют сечение $\mathbb{R}$ и задают единственное вещественное число; оно называется *стандартной частью* $x$, $\mathrm{st}(x)$. *Монада* числа $r \in \mathbb{R}$ – это $\mu(r) = \{x \in \mathbb{R}^* \mid \mathrm{st}(x) = r\}$.

**Предложение 117.** Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Тогда:

(1) $E$ открыто iff $\mu(r) \subseteq E^*$ для всех $r \in E$.
(2) $E$ замкнуто iff $\mathrm{st}(x) \in E$ для любого конечного $x \in E^*$.
(3) $E$ компактно iff для любого $x \in E^*$ $\mathrm{st}(x)$ существует и лежит в $E$.

**Теорема 118** (Лося)**.** *Пусть $\varphi(X_1, \dots, X_m, x_1, \dots, x_n)$ – формула языка $L(\mathbb{R})$. Тогда для любых $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}$ и $f^1_{\mathcal{U}}, \dots, f^n_{\mathcal{U}} \in \mathbb{R}^*$ $\varphi(A^*_1, \dots, A^*_m, f^1_{\mathcal{U}}, \dots, f^n_{\mathcal{U}})$ тогда и только тогда, когда $\{i \in \mathbb{N} \mid \varphi(A_1, \dots, A_m, f^1(i), \dots, f^n(i))\} \in \mathcal{U}$.*

**Следствие 119** (принцип переноса)**.** Пусть $\varphi(X_1, \dots, X_m, x_1, \dots, x_n)$ – формула языка $L(\mathbb{R})$. Тогда для любых $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}$ и $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ $\varphi(A_1, \dots, A_m, r_1, \dots, r_n)$ верно в $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\varphi(A^*_1, \dots, A^*_m, r^*_1, \dots, r^*_n)$ верно в $\mathbb{R}^*$.

**Определение 120.** Множество $A \in V(\mathbb{R}^*)$ называется *стандартным*, если $A = B^*$ для некоторого $B \in V(\mathbb{R})$, *внутренним*, если $A \in B^*$ для некоторого $B \in V(\mathbb{R})$, и *внешним*, если оно не внутреннее.

**Предложение 121.**
(1) Любое непустое внутреннее множество $A \subset \mathbb{N}^*$ имеет наименьший элемент.
(2) Любое непустое ограниченное сверху внутреннее множество $A \subset \mathbb{R}^*$ имеет точную верхнюю грань.

**Предложение 122** (переполнение)**.**
(1) Если $A$ внутреннее, и $\mathbb{N} \subset A$, то $A$ содержит бесконечно большое натуральное число.

(2) Если $A$ внутреннее, и для всех бесконечно больших $\omega \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ $\omega \in A$, то $A$ содержит конечное натуральное число $n \in \mathbb{N}$.
(3) Если $A$ внутреннее, и $\forall \epsilon > 0$, $\epsilon \approx 0$, $\epsilon \in A$, то $A$ содержит стандартное $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$.
(4) Если $A$ внутреннее, и $A$ содержит все положительные стандартные вещественные числа, то $A$ содержит бесконечно малое число.
(5) Если $A$ внутреннее, и $A$ содержит все конечные положительные гипердействительные числа, то $A$ содержит бесконечно большое число.

**Теорема 123** (принцип внутреннего определения). *Пусть* $A_1, \ldots, A_n$ *– внутренние множества из* $V(\mathbb{R}^*)$, $\varphi(X_1, \ldots, X_n, x)$ *– формула языка* $L(V(\mathbb{R}))$. *Тогда* $\{x \in A_1 \mid \varphi(A_1, \ldots, A_n, x)\}$ *– внутреннее множество.*

**Лемма 124** (Робинсона). (1) Если $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^*$ – внутренняя, и $f(n) \approx 0$ для любого конечного $n$, то существует бесконечно большое $\omega \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$, для которого $f(n) \approx 0$ для всех $n \leq \omega$, $n \in \mathbb{N}^*$.
(2) Если $f : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}^*$ – внутренняя, и $f(n) \approx 0$ для любого конечного положительного $x$, то существует бесконечно большое $\omega > 0$, $\omega \in \mathbb{R}^*$, для которого $f(x) \approx 0$ для всех $x \in (0, \omega] \subset \mathbb{R}^*$.

**Предложение 125.** $\lim a_n = a$ iff $a_\omega \approx a$ для всех нестандартных $\omega$.

**Предложение 126.** (1) $f$ непрерывна в точке $a \in I$ iff $f(x) \approx f(a)$ для всех $x \in I^*$, $x \approx a$.
(2) $f$ равномерно непрерывна на $I$ iff $f(x) \approx f(y)$ для всех $x, y \in I^*$, $x \approx y$.

**Определение 127.** Пусть $I$ – открытый интервал в $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $dx \neq 0$ – бесконечно малая. Тогда $dy = f(a+dx) - f(a)$ – *дифференциал* функции $f$ в точке $a \in I$. Если стандартная часть $\frac{dy}{dx}$ существует и одинакова для всех $dx \neq 0$, то $f$ имеет производную в $a$, и $f'(a) = \mathrm{st}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

**Определение 128.** Пусть $I$ – открытый интервал в $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $\Delta x > 0$ – положительное число. *Сумма Римана*

$$\sum_a^b f(x)\Delta x = f(x_0)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x + f(x_n)(b - n\Delta x),$$

где $n$ – наибольшее число, для которого $a + n\Delta x \leq b$, $x_i = a + i\Delta x$. *Определённый интеграл* $f$ на $I$ – это сумма Римана $\sum_a^b f(x)\delta x$ для некоторого бесконечно малого $\delta x$.

**Теорема 129** (Пеано о существовании решений ОДУ). *Пусть* $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *– непрерывная ограниченная функция,* $u_0 \in \mathbb{R}$. *Тогда существует функция* $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, *для которой* $u(0) = 0$, *и*

$$\frac{du}{dt} = f(t, u(t)), \quad t \in [0,1].$$

## 11. Ранг Морли

**Определение 130.** Пусть $\mathcal{M}$ – $L$-структура, $\varphi(\bar{v})$ – $L_M$-формула. Индуктивно определим $\mathrm{RM}^{\mathcal{M}}(\varphi)$ – *ранг Морли* $\varphi$ в $\mathcal{M}$.
(1) $\mathrm{RM}^{\mathcal{M}}(\varphi) \geq 0$ iff $\varphi(\mathcal{M}) \neq \emptyset$.
(2) Если $\alpha$ – предельный, то $\mathrm{RM}^{\mathcal{M}}(\varphi) \geq \alpha$ iff $\mathrm{RM}^{\mathcal{M}}(\varphi) \geq \beta$ для всех $\beta < \alpha$.
(3) Если $\alpha$ не предельный, то $\mathrm{RM}^{\mathcal{M}}(\varphi) \geq \alpha$, если найдутся такие $L_M$-формулы $\psi_1(\bar{v}), \psi_2(\bar{v}), \ldots$, что $\{\psi_i(\mathcal{M})\}$ – бесконечный набор непересекающихся подмножеств $\varphi(\mathcal{M})$, и $\mathrm{RM}^{\mathcal{M}}(\psi_i) \geq \alpha$ для любого $i$.

**Лемма 131.** Пусть $\theta(\bar{v}, \bar{w})$ – $L$-формула, $\mathcal{M}$ $\aleph_0$-насыщенная, $\bar{a}, \bar{b} \in M$, и $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{b})$. Тогда $\mathrm{RM}^{\mathcal{M}}(\theta(\bar{v}, \bar{a})) = \mathrm{RM}^{\mathcal{M}}(\theta(\bar{v}, \bar{b}))$.

**Лемма 132.** Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – две $\aleph_0$-насыщенные модели теории $T$, $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$. Если $\varphi$ – $L_M$-формула, то $\mathrm{RM}^{\mathcal{M}}(\varphi) = \mathrm{RM}^{\mathcal{N}}(\varphi)$.

**Следствие 133.** Пусть $\mathcal{M}$ – L-структура, $\varphi$ – $L_M$-формула, $\mathcal{N}_0$ и $\mathcal{N}_1$ – два $\aleph_0$-насыщенных элементарных расширения $\mathcal{M}$. Тогда $RM^{\mathcal{N}_0}(\varphi) = RM^{\mathcal{N}_1}(\varphi)$.

**Определение 134.** Пусть $\mathcal{M}$ – L-структура, $\varphi$ – $L_M$-формула. $RM(\varphi)$ – *ранг Морли* формулы $\varphi$ – это $RM^{\mathcal{N}}(\varphi)$ для любого $\aleph_0$-насыщенного элементарного расширения $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$.

**Определение 135.** Пусть $\mathcal{M} \models T$, $X \subseteq M^n$ – множество, определяемое формулой $\varphi(\bar{v})$. Тогда *ранг Морли* $RM(X)$ множества $X$ – это $RM(\varphi)$.

**Лемма 136.** Пусть $\mathcal{M}$ – L-структура, $X$, $Y$ – выразимые подмножества $M^n$.

(1) Если $X \subseteq Y$, то $RM(X) \leq RM(Y)$.
(2) $RM(X \cup Y) = \max(RM(X), RM(Y))$.
(3) Если $X \neq \emptyset$, то $RM(X) = 0$ тогда и только тогда, когда $X$ конечно.

**Определение 137.** Теория $T$ называется *тотально трансцендентной*, если для любой модели $\mathcal{M} \models T$ и любой $L_M$-формулы $\varphi$ $RM(\varphi) < \infty$.

**Предложение 138.** Пусть $\mathcal{M}$ – L-структура, $\varphi$ – $L_M$-формула, $RM(\varphi) = \alpha$. Существует такое натуральное число $d$, что если $\psi_1, \ldots, \psi_n$ – такие $L_M$-формулы, что $\psi_1(\mathbb{M}), \ldots, \psi_n(\mathbb{M})$ – непересекающиеся подмножества $\psi(\mathbb{M})$, и для всех $i$ $RM(\psi_i) = \alpha$, то $n \leq d$. Такое число $d$ называется *степенью Морли* формулы $\varphi$, $\deg_{\mathbb{M}}(\varphi) = d$.

**Следствие 139.** $\varphi$ сильно минимальна iff $RM(\varphi) = \deg_{\mathbb{M}}(\varphi) = 1$.

**Определение 140.** Пусть $p \in S_n(A)$. Тогда *ранг Морли* типа $p$ – это $RM(p) = \inf\{RM(\varphi), \varphi \in p\}$. Если $RM(p)$ – ординал, то $\deg_{\mathbb{M}}(p) = \inf\{\deg_{\mathbb{M}}(\varphi), \varphi \in p, RM(\varphi) = RM(p)\}$. Через $\varphi_p$ обозначается формула, реализующая $RM(p)$ и $\deg_{\mathbb{M}}(p)$

**Лемма 141.** Если $p, q \in S_n(A)$, $RM(p), RM(q) < \infty$, и $p \neq q$, то $\varphi_p \neq \varphi_q$.

**Теорема 142.** *Если* $T$ *$\omega$-стабильна, то* $T$ *тотально трансцендентна. Если* $L$ *– счётный язык, и* $T$ *тотально трансцендентна, то* $T$ *$\omega$-стабильна.*

**Определение 143.** Пусть $A \subset \mathbb{M}$, $\bar{a} \in \mathbb{M}$. Тогда $RM(\bar{a}) = RM(tp(\bar{a}))$, аналогично – $RM(\bar{a}/A)$.

**Лемма 144.** Пусть $A \subset \mathbb{M}$, $\bar{a}, b \in \mathbb{M}$, и $b$ алгебраичен над $A \cup \{\bar{a}\}$. Тогда $RM(\bar{a}, b/A) = RM(\bar{a}/A)$.

**Теорема 145.** *Пусть* $T$ *– сильно минимальная теория,* $A \subset \mathbb{M}$, $\bar{a} \in \mathbb{M}$. *Тогда* $RM(\bar{a}/A) = \dim(\bar{a}/A)$.

**Определение 146.** Пусть $V \subseteq K^n$ – неприводимое алгебраическое многообразие, $I(V)$ – идеал многочленов из $K[x_1, \ldots, x_n]$, обращающихся в ноль на $V$. *Размерность Крулля* – это наибольшая длина последовательности простых идеалов

$$I(V) = P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_m \subset K[x_1, \ldots, x_n].$$

**Предложение 147.** Пусть $K$ – алгебраически замкнутое поле, и $V \subseteq K^n$ – неприводимое многообразие. Тогда $RM(V)$ равен размерности Крулля многообразия $V$.

## 12. Интуиционизм и конструктивная математика

**Определение 148.** Аксиомы интуиционистского исчисления высказываний. Правило MP. Отношение $\vdash$.

**Лемма 149.** (1) $\vdash (\neg\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow \neg(A \to \neg B)$.
(2) $\vdash (\neg\neg(A \vee B)) \leftrightarrow \neg\neg(\neg A \to B)$.
(3) $\vdash (\neg\neg(A \to B)) \leftrightarrow (\neg\neg A \to \neg\neg B)$.

**Лемма 150.** Для любой формулы $A$ существует формула $B$, в которой участвуют только импликации, и $\vdash (\neg A \leftrightarrow B)$.

**Теорема 151** (Гливенко). *Если формула $A$ выводима в классическом исчислении высказываний, то $\neg\neg A$ выводима в интуиционистском исчислении высказываний.*

**Теорема 152** (Генцена). *Если $\vdash A \vee B$, то либо $\vdash A$, либо $\vdash B$.*

**Определение 153.** *Точная модель* интуиционистского исчисления – модель $\mathcal{M} \models T$, в которой формула $\varphi$ является тавтологией тогда и только тогда, когда $\vdash \varphi$.

**Теорема 154** (Гёделя). *У интуиционистского исчисления высказываний нет точной конечной модели.*

**Теорема 155.** *У интуиционистского исчисления высказываний есть точная счётная модель.*

**Определение 156.** Аксиомы и правила вывода интуиционистского исчисления предикатов.

**Теорема 157.** *Для каждой формулы $A$ существует формула $g(A)$ (эффективно конструируемая по $A$), для которой:*

(1) *в классической логике $\vdash_{\text{class}} A \leftrightarrow g(A)$;*
(2) *в интуиционистской логике $\vdash g(A) \leftrightarrow \neg\neg g(A)$;*
(3) *$A$ выводимо в классической логике iff $g(A)$ выводимо в интуиционистской.*

**Определение 158.** *Структура Крипке* для языка $L$ – это частичный порядок $\leq$, в узлах которого $k$ стоят множества пропозициональных переменных $D(k)$, причём если $k \leq k'$, то $D(k) \subseteq D(k')$. На этом порядке вводится отношение *форсинга*:

- $k \Vdash x$, если $x \in D(k)$;
- $k \Vdash A \wedge B$, если $k \Vdash A$ и $k \Vdash B$;
- $k \Vdash A \vee B$, если $k \Vdash A$ или $k \Vdash B$;
- $k \Vdash A \to B$, если $\forall k' \geq k$, если $k' \Vdash A$, то $k' \Vdash B$.

**Предложение 159.** (1) Если $k \Vdash A$ и $l \geq k$, то $l \Vdash A$.
(2) Если $\Gamma \vdash A$ (в интуиционистской логике), и все формулы $\Gamma$ форсируются в $k$, то $k \Vdash A$.

**Следствие 160** (корректность). Если $\vdash A$, то $A$ форсировано во всех узлах любой структуры Крипке.

**Определение 161.** Вещественное число $r$ называется *вычислимым*, если существует вычислимая функция (алгоритм), по точности $\epsilon$ выдающая $\epsilon$-приближение к $r$: $|r - f(\epsilon)| < \epsilon$.

**Лемма 162.** Существуют вычислимые последовательности рациональных чисел $(a_n), (b_n) \subset I = [0, 1]$, такие, что для интервалов $J_n = [a_n, b_n]$ верно следующее:

(1) если $n \neq m$, то $|J_n \cap J_m| \leq 1$;
(2) если $a_n \neq 0$, то $a_n \in \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$; если $b_n \neq 1$, то $b_n \in \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$;
(3) $I_c \subset \cup_n J_n$ ($J_n$ покрывают все вычислимые числа из $[0, 1]$), но $I \not\subset \cup_n J_n$.

**Лемма 163.** Существует последовательность прямоугольников $(A_k)$, $A_k \subset I \times I$, с непересекающимися внутренностями и вычислимыми вершинами, для которой:

(1) $\delta A_j \setminus \cup_{i<j} A_i \neq \emptyset$ (новый прямоугольник добавляет новую границу);
(2) $\forall j \exists n > j$: $\delta A_j \cup \operatorname{Int}(\cup_{i \leq n} A_i)$ (рано или поздно каждый прямоугольник со всех сторон окружается другими);
(3) $I_c^2 \subset \cup_i A_i$ ($A_i$ покрывают все вычислимые точки в $I \times I$), но $I \times I \not\subset \cup_n J_n$.

**Теорема 164.** *Существует бесконечное дерево, у которого все вычислимые пути конечны.*

**Теорема 165** (Оревкова). *Существует вычислимая непрерывная функция $f : I_c^2 \to I_c^2$, для которой $\forall x \in I_c^2 f(x) \neq x$ (теорема Брауэра о неподвижной точке неверна в конструктивной математике).*