Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики
Факультет информационных технологий и программирования, кафедра компьютерных технологий

Магистерская диссертация на тему

Автоматическое доказательство в системе Секущие Плоскости

Автор: студент группы 6539 Смаль А. В.
Научный руководитель: к. ф.-м. н., доцент Гирш Э. А.

Санкт-Петербург
2008

Постановка задачи

Цель работы — разработать алгоритм для автоматического поиска доказательства в системе Секущие Плоскости.
Для этого необходимо решить следующие задачи:

1. рассмотреть существующие системы доказательств и подходы к построению автоматических систем доказательств,
2. исследовать выбранную систему доказательств для выявления возможных путей улучшения алгоритма,
3. на основе существующих разработок в этой области предложить алгоритм для поиска доказательств в системе Секущие Плоскости.

Требования к алгоритму

1. *Полнота.* Алгоритм в конечном счете должен гарантированно находить доказательство для любой тавтологии.
2. *Эффективность.* Поиск доказательства должен быть эффективным.
3. *Мощь.* Алгоритм должен быстро находить короткие решения для тех сложных тавтологий, которые имеют короткое решение.

Система доказательств

Определение

Система доказательств (S. Cook and R. Reckhow, 1979) для языка L — это полиномиально вычислимая функция из множества слов (доказательств) в L (чьи элементы рассматриваются как теоремы).

Определение

Пропозициональная система доказательств — это система доказательств для фиксированного $co\mathcal{NP}$-полного языка булевых тавтологий (например, тавтологии в ДНФ).

Сравнение систем доказательств

Определение

Будем говорить, что Π_1 **полиномиально симулирует** Π_2, если существует функция g сопоставляющая доказательствам для Π_2 доказательства для Π_1 так, что для каждой гипотезы π для Π_2 верно $\Pi_1(g(\pi)) = \Pi_2(\pi)$ и $g(\pi)$ не более чем в полиномиальное количество раз длиннее π.

Определение

Система доказательств Π_1 **экспоненциально отделена** от Π_2, если существует бесконечная последовательность слов $t_1, t_2, \ldots \in L$ такая, что длина самого короткого доказательства для t_i в системе Π_1 полиномиальна от длины t_i, а в системе Π_2 — экспоненциальна от длины t_i.

Определение

Система доказательств Π_1 **экспоненциально сильнее**, чем Π_2, если Π_1 полиномально симулирует Π_2 и экспоненциально отделена от неё.

Различные подходы

Определение

Резолюционная система доказательств — это система для доказательства общезначимости формул пропозициональной логики, основанная на методе резолюции:

$$\frac{\bigvee A;\ \bigvee B}{\bigvee (A \cup B) \setminus \{p, \neg p\}},$$

где A и B — множества литералов, $p \in A$ и $\neg p \in B$. Переменная p называется **контрарной** для A и B.

Определение

Полуалгебраические система доказательств — система, основанная на преобразовании булевых формул в систему алгебраических уравнений или неравенств.

Секущие Плоскости

Cutting Planes, Секущие Плоскости (CP). Исторически первая система доказательств на основе неравенств. Основана на алгоритме секущих плоскостей предложенном R. Gomory для решения задач целочисленного линейного программирования.

Из системы неравенств S требуется вывести $0 \geq 1$ используя два правила вывода:

$$\frac{f_1 \geq 0; \ldots; \ f_t \geq 0}{\sum_{i=1}^{t} \lambda_i f_i \geq 0},$$

где $\lambda_i \geq 0$, и

$$\frac{\sum_i a_i x_i \geq c}{\sum_i a_i x_i \geq \lceil c \rceil},$$

где $a_i \in \mathbb{Z}$ и x_i — переменная. Все промежуточные неравенства должны иметь целые коэффициенты при переменных.

Анализ системы Секущие Плоскости

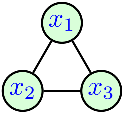
Вопрос

В каких случаях можно получить неравенство *сильнее* булева клоза?

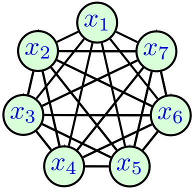
Что сделано?

1. Полный анализ получения неравенств с единичными коэффициентами. Выведены условия получения произвольно неравенства с единичными коэффициентами.
2. Отдельный случай — получение неравенств из 2-клозов.
3. Общий анализ для неравенств с произвольными коэффициентами.
4. Анализ для неравенств с одним нетривиальным коэффициентом, полученных из 2-клозов.

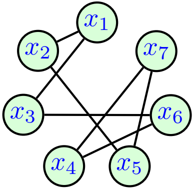
Анализ системы Секущие Плоскости для 2-клозов



$$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$$



$$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_7 \geq 6$$



$$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_7 \geq \lceil 7/2 \rceil = 4$$

Результаты исследования

1. Проведен анализ системы доказательств Секущие Плоскости.
   1.1 Полный анализ получения неравенств с единичными коэффициентами. Выведены условия получения произвольного неравенства с единичными коэффициентами.
   1.2 Отдельный случай — получение неравенств из 2-клозов.
   1.3 Общий анализ для неравенств с произвольными коэффициентами.
   1.4 Анализ для неравенств с одним нетривиальным коэффициентом, полученных из 2-клозов.
2. На основе анализа и существующих разработок предложен алгоритм для поиска доказательств в системе Секущие Плоскости.

Алгоритм

Основан на идеях алгоритма для упорядоченной резолюции с насыщением уровная и алгоритма для системы доказательств для **Lovász-Schrijver calculus**. Использует улучшения, которые позволяют ему находить решение тавтологий, основанных на обобщенном принципе Дирихле.

Результаты для PHP^n_m

Тавтология	Размер системы	Упорядоченная резолюция	Предложенный алгоритм
PHP^3_4	22	73	48
PHP^4_5	45	308	108
PHP^5_6	81	3 110	223
PHP^6_7	133	—	395
PHP^7_8	204	—	710
PHP^8_9	297	—	1 082
PHP^9_{10}	415	—	1 752
PHP^3_8	92	910	305
PHP^4_6	66	1 010	183
PHP^4_7	91	2 805	279
PHP^4_8	120	5 950	401

Результаты для $2\mathrm{PHP}_m^n$

Тавтология	Размер системы	Упорядоченная резолюция	Предложенный алгоритм
$2\mathrm{PHP}_5^2$	25	86	71
$2\mathrm{PHP}_6^2$	46	263	158
$2\mathrm{PHP}_7^2$	77	484	272
$2\mathrm{PHP}_7^3$	112	2 205	540
$2\mathrm{PHP}_8^3$	176	—	1201

Спасибо за внимание!
Вопросы?