Домашнее задание от 3 сентября 2011 года

Задача 1. Пусть $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение в евклидовом или унитарном пространстве. Докажите неравенство Коши-Буняковского:

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y).$$

Определение. Косинусом угла между двумя ненулевыми векторами x и y в евклидовом пространстве называется величина

$$\cos\theta = \frac{(x,y)}{\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}}.$$

Задача 2 [ФС 1078]. Определите косинусы внутренних углов треугольника ABC, заданного координатами вершин:

$$A = (1,2,1,2), \quad B = (3,1,-1,0), \quad C = (1,1,0,1).$$

Задача 3 [ФС 1079]. Определите косинусы углов между прямой $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ и осями координат.

Задача 4 [ФС 1080]. Найдите длины диагоналей n-мерного куба со стороной 1.

Определение. Два вектора x и y называются ортогональными, если $(x,y) = 0$.

Задача 5 [ФС 1081]. Найдите число диагоналей n-мерного куба, ортогональных к данной диагонали.

Определение. Вектор x называются нормированным, если $(x,x) = 1$.

Задача 6 [ФС 1085]. Найдите нормированный вектор, ортогональный к векторам $(1,1,1,1)$, $(1,-1,-1,1)$, $(2,1,1,3)$.

Определение. Базис пространства, состоящий из попарно ортогональных векторов, называется ортогональным базисом. Ортогональный базис, состоящий из нормированных векторов, называется ортонормированным.

Задача 7 [ФС 1086]. Постройте ортонормированный базис пространства, приняв за два вектора этого базиса векторы

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{-5}{6}\right).$$

Задача 8 [ФС 1086]. Посредством процесса ортогонализации найдите ортогональный базис пространства, порожденного векторами $(1, 2, 1, 3)$, $(4, 1, 1, 1)$, $(3, 1, 1, 0)$.

Задача 9 [ФС 1087]. Припишите к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

еще две строки, ортогональные между собой и ортогональные первым трем строкам.

Задача 10. n-мерный куб с вершинами в точках с координатами ± 1 разделили на 2^n частей, проведя плоскости, параллельные $(n-1)$-мерным граням и проходящие через начало координат. В каждый из получившихся единичных кубов вписали шар. Рассмотрим шар с центром в начале координат, касающийся всех построенных 2^n шаров. Чему равен его радиус? В частности, при каких n диаметр этого шара будет больше длины ребра исходного куба?