Многочлены и рациональные функции

Если вы обнаружите опечатки в формулировках задач, пожалуйста, сообщите об этом по адресу m.vsemirnov@gmail.com

Задача 1. Пусть K — поле характеристики 0. Докажите, что многочлен из $K[x]$ делится на свою производную в том и только в том случае, когда он равен $c(x-x_0)^n$ для некоторых c, x_0 и n.

Пусть K — поле. На множестве $\{(f,g) : f, g \in K[x],\ g \neq 0\}$ введем отношение эквивалентности:

$$(f,g) \sim (f_1, g_1) \Leftrightarrow fg_1 = f_1 g$$

Класс эквивалентности пары (f,g) будем называть рациональной дробью (или дробной рациональной функцией) и будем обозначать $\frac{f}{g}$. Обычно применяется стандартная терминология для дробей (числитель, знаменатель и т.п.).

На множестве дробей введем операции сложения и умножения:

$$\frac{f}{g} + \frac{f_1}{g_1} = \frac{fg_1 + gf_1}{gg_1}, \qquad \frac{f}{g} \cdot \frac{f_1}{g_1} = \frac{ff_1}{gg_1}.$$

Задача 2. Проверьте, что эти операции корректно определены, то есть результат зависит лишь от классов эквивалентности, но не от выбора конкретных представителей в классах.

Задача 3. Проверьте, что множество рациональных дробей с введенными выше операциями сложения и умножения является полем.

Это поле называется полем рациональных функций и обозначается $K(x)$.

Замечание: если $f = \frac{u}{w} \in K(x)$, $u, w \in K[x]$ и $w(x_0) \neq 0$, то корректно определено значение $f(x_0) = \frac{u(x_0)}{w(x_0)}$.

Если $f = \frac{u}{w} \in K(x)$, $u, w \in K[x]$, то определим производную $f' = \frac{u'w - uw'}{w^2}$.

Задача 4. Проверьте, что так определенная производная обладает всеми стандартными свойствами (формулы для производной суммы, произведения, частного и т.п.).

Во всех последующих задачах предполагается, что характеристика поля K равна 0. Желающие могут рассмотреть лишь частный случай $K = \mathbb{R}$.

Задача 5. Пусть $u(x)$, $w(x)$ — многочлены с коэффициентами из поля K характеристики 0. Пусть $w(x_0) \neq 0$. Докажите, что для того, чтобы x_0 было корнем кратности k для числителя $u(x)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Задача 6 (Формула Тейлора для рациональных дробей). Пусть $u(x)$, $w(x)$ — многочлены с коэффициентами из поля K характеристики 0, а $w(x_0) \neq 0$. Покажите, что рациональная дробь $f = \frac{u}{w}$ может быть представлена в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{h(x)}{w(x)}(x-x_0)^{n+1},$$

где $h(x)$ — многочлен.

Задача 7. Докажите, что если x_0 есть корень кратности k для многочлена $g_1(x)g_2'(x) - g_1'(x)g_2(x)$, то x_0 будет корнем кратности $k+1$ для многочлена $g_1(x)g_2(x_0) - g_1(x_0)g_2(x)$, если этот многочлен не равен 0 тождественно, и обратно. [Указание: рассмотрите $\frac{g_1}{g_2}$.]

Задача 8. Докажите, что если многочлен g не имеет кратных корней, то $(g')^2 - gg''$ не имеет корней кратности выше $n-1$, где $n = \deg g$.

Задача 9. Постройте многочлен g степени n, для которого $(g'(x))^2 - gg''$ имеет корень x_0 кратности $n-1$, не являющийся корнем g.