

## Комбинаторика. Тема 1: Метод математической индукции

### Домашнее задание

**Задача 1.** Докажите, что

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{2k^2 + 7k + 4}{k^3 + 3k^2 + 2k} = \frac{3n^2 + 9n + 6 + (-1)^{n+1}(2n + 6)}{2(n + 1)(n + 2)}.$$

**Задача 2.** [ЗМО, с.70, 24.2] Пусть  $|X| = n$ . Докажите, что

$$\sum_{A, B \subseteq X} |A \cap B| = n4^{n-1}.$$

**Задача 3.** [ЗВМО, с.22, 5б] Дан произвольный набор длины  $2^k$  из чисел 1 и  $-1$ . Из него получается новый по следующему правилу: каждое число умножается на следующее за ним; последнее  $2^k$ -ое умножается на первое. С новым набором из 1 и  $-1$  проводится та же операция и т.д. Докажите, что в конце концов получится набор, состоящий только из 1.

**Задача 4.** [КМ] (пример “немонотонной” индукции) Пусть  $P(n)$  обозначает утверждение «для любых неотрицательных чисел  $x_1, \dots, x_n$  справедливо неравенство  $x_1 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^n$ ».

а) Докажите  $P(2)$ .

б) Докажите, что из  $P(n)$  следует  $P(n-1)$ . (Указание: положите  $x_n = \frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$ .)

в) Докажите, что  $P(n)$  и  $P(2)$  влечет  $P(2n)$ .

г) Докажите, что  $P(n)$  верно для любого  $n$ .

**Задача 5.** Пусть  $a \neq \pm 2$  и пусть последовательность  $G_n$  удовлетворяет начальным условиям  $G_0 = 0$ ,  $G_1 = 1$  и рекуррентному соотношению  $G_{n+1} = aG_n - G_{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Докажите, что

$$G_n = \frac{(a + \sqrt{a^2 - 4})^n - (a - \sqrt{a^2 - 4})^n}{2^n \sqrt{a^2 - 4}}.$$

Какие последовательности получаются при  $a = \pm 2$ ?

**Задача 6.** [ЗСМО, с.79, 11] Докажите, что для любого натурального  $n$  число  $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$  является целым и нечетным.

**Задача 7.** [ЗСМО, с.79, 12] Докажите, что наибольшая степень 2, на которое делится число  $[(1 + \sqrt{3})^{2m+1}]$ , равна  $2^{m+1}$ .

**Задача 8.** [ЗВМО, с.24, 15] Даны целые положительные числа  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , такие, что  $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Докажите, что  $a_n \geq 2^n$ .

**Задача 9.** Определим последовательности многочленов  $T_n(x)$  и  $U_n(x)$ :

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x, & T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \\ U_0(x) &= 1, & U_1(x) &= 2x, & U_{n+1}(x) &= 2xU_n(x) - U_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Они называются *многочленами Чебышева первого и второго рода*, соответственно.

Докажите, что

а)  $T_n$  и  $U_n$  — многочлены степени  $n$ .

б)  $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$  и  $U_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$ , если  $\sin \theta \neq 0$ .

**Задача 10.** Докажите, что

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{1}{n-k} \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k}, \quad \text{при } n \geq 1,$$
$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k}.$$

**Задача 11.** Пусть  $H_0 = 0$ ,  $H_1 = 1$ ,  $H_{n+1} = 3H_n - H_{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

а) Докажите, что для любого натурального  $n$

$$H_n^2 - 3H_n H_{n-1} + H_{n-1}^2 = 1.$$

б) Если неотрицательные целые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют соотношению  $x^2 - 3xy + y^2 = 1$ , то либо  $x = H_n$ ,  $y = H_{n-1}$ , либо  $x = H_{n-1}$ ,  $y = H_n$  для некоторого  $n$ .

в) Попробуйте обобщить п. а) и б) на последовательности  $H_0 = 0$ ,  $H_1 = 1$ ,  $H_{n+1} = aH_n - H_{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , для произвольного целого  $a \geq 3$ .