

Комментарии к слайдам и анимациям

Ю.В.МАТИЯСЕВИЧ

October 18, 2007

Тайная жизнь дзета-функции Римана

Выступление 8 октября 2007 года на Общеинститутском математическом семинаре ПОМИ РАН, <http://logic.pdmi.ras.ru/GeneralSeminar/abstr-r/097.html>.

Слайды и компьютерную анимацию можно загрузить с <http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/talk/pomiseminar2007>.

Дальнейшие материалы по теме выступления см. на сайте <http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/personaljournal/zetahiddenlife>.

Дзета функция Римана

Эту функцию изучал еще Л. Эйлер.

Равенство двух представлений – в виде ряда Дирихле и в виде произведения Эйлера – является аналитическим выражением *основной теоремы арифметики*, гласящей, что каждое натуральное число представимо, и единственным образом, в виде произведения степеней простых чисел.

Л. Эйлер дал новое доказательство бесконечности простых чисел – если бы их было конечное количество, то произведение Эйлера было бы определено и при $s = 1$ и давало бы конечное значение для $\zeta(1)$.

Basel Problem (Pietro Mingoli, 1644)

Базель в Швейцарии – город, в котором Л. Эйлер родился в 1707 году.

Л. Эйлер вычислил 17 знаков значения $\zeta(2)$, что было нетривиально, ибо ряд Дирихле сходится медленно.

В течении своей жизни Л. Эйлер неоднократно возвращался к Basel Problem и дал несколько решений, в том числе вполне строгих с нынешней точки зрения. Решение, воспроизведенное здесь, было третьим, данным Л. Эйлером. Слово "доказательство" взято в кавычки, поскольку в то время строгого обоснования разложимости $\sin(x)$ в ряд Тейлора у Л. Эйлера не было, он написал его, считая $\sin(x)$ многочленом с бесконечным количеством корней.

Другое доказательство

Другие значения $\zeta(s)$

Числа Бернулли

Благодаря четности функции $\frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2}$, все числа Бернулли с нечетными индексами, большими, чем 1, равны 0, и это их свойство является ключевым для дальнейшего содержания этого доклада.

К сожалению, в обозначениях чисел Бернулли нет полной стандартизации: некоторые авторы исключают из рассмотрения нулевые значения, некоторые меняют знаки (по сравнению с вышеприведенными).

Еще другие значения $\zeta(s)$

Такие значения этих расходящихся рядов были даны Л. Эйлером.

Почему такое значение $\zeta(0)$

Почему такие значения $\zeta(-1), \zeta(-2), \zeta(-3), \dots$

Функциональное уравнение

Дзета функция Римана

Дирихле стал рассматривать дзета функцию при комплексном значении аргумента. Аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость дало для $\zeta(-1), \zeta(-2), \zeta(-3), \dots$ значения, указанные Л. Эйлером.

Распределение простых чисел

Интегральный логарифм $\int^x \frac{1}{\ln(t)} dt$ дает гораздо лучшее приближение к $\pi(x)$, чем дробь $\frac{x}{\ln(x)}$.

Функция Чебышева $\theta(x)$

Приближение функции $\theta(x)$ "простой" функцией x столь же "хорошо", как и приближение функции $\pi(x)$ "сложной" функцией $\int^x \frac{1}{\ln(t)} dt$.

Функция Чебышева $\psi(x)$

Приближение функции $\psi(x)$ "простой" функцией x также является столь же "хорошим", как и приближение функции $\pi(x)$ "сложной" функцией $\int^x \frac{1}{\ln(t)} dt$, но выражение для разности $\psi(x)$ через нули дзета-функции (даваемое теоремой von Mangoldt) гораздо проще соответствующего выражения для разности $\pi(x) - \int^x \frac{1}{\ln(t)} dt$, с которым работа Б. Риман.

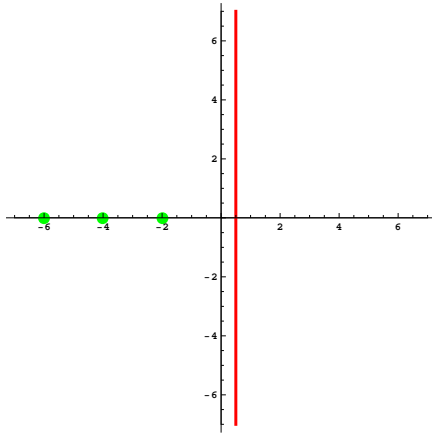


Figure 1: z -plane

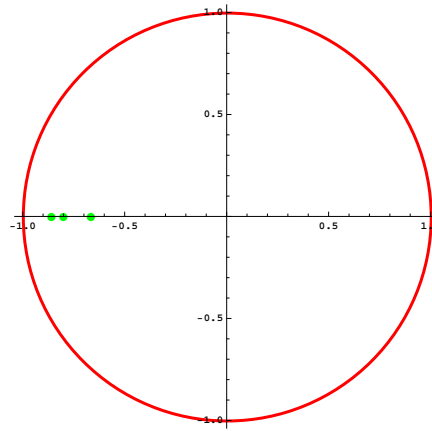


Figure 2: w -plane

Гипотеза Римана

Функция Римана $\xi(z)$

Традиция, берущая свое начало в основополагающей работе Б. Римана, заключается в том, чтобы вместо функции $\zeta(z)$ работать с целой функцией $\xi(z)$. Основная идея предлагаемого здесь подхода состоит в том, что надо не лишать дзета функцию ее “тривиальных” нулей, а постараться использовать наше знание их расположения.

Замена переменной

Правая полуплоскость является естественной областью при работе с рядами Дирихле. Мы, однако, будем в дальнейшем работать с рядами Тейлора и приближениями Паде, для которых более естественны круги; именно этим вызван переход с z -плоскости на w -плоскость. При этом критическая прямая $\Re(z) = \frac{1}{2}$ на z -плоскости переходит в *критическую окружность* $|w| = 1$ на w -плоскости, а тривиальные нули функций $\tilde{\zeta}(w)$ и $\tilde{\zeta}(w)$ переходят в тривиальные нули функции $\tilde{\zeta}(w)$.

Подгипотезы

Подгипотезы позволяют нам отделиться от критической окружности, на которой лежит бесконечно много нулей дзета функции.

Почему верна подгипотеза RH₁?

Определители

Собственные числа

Похоже, что гипотеза Римана ничего не говорит нам про положение индивидуальных собственных чисел.

(без заголовка)

Здесь показаны 24 собственных значения матрицы $L_{1,24}$

(без заголовка)

Здесь показаны 48 собственных значения матрицы $L_{1,48}$

(без заголовка)

Здесь показаны 96 собственных значения матрицы $L_{1,96}$

(без заголовка)

Здесь показаны 192 собственных значения матрицы $L_{1,192}$

(анимация 1)

Чтобы увидеть "тайную жизнь" дзета-функции Римана, надо посмотреть собственные значения матриц $L_{1,1}, L_{1,2}, L_{1,3}, \dots$ в быстрой последовательности. В Acrobat под Windows для этого надо находиться в режим Full Screen, войти в который можно нажав CTRL-L.

Предположение

Только тривиальные нули

Естественно посмотреть, насколько полученные картинки определяют тривиальными нулями, и каков вклад нетривиальных нулей. У функции $\tilde{\zeta}_T(w)$ те же тривиальные нули, что и у $\zeta(w)$, но нет никаких других. Для этой функции можно рассмотреть соответствующие матрицы $L_{1,m}(\tilde{\zeta}_T)$, имеющие аналогичное поведение среднего геометрического собственных чисел.

(без заголовка)

Здесь показаны 24 собственных значения матрицы $L_{1,24}(\tilde{\zeta}_T)$

(без заголовка)

Здесь показаны 48 собственных значения матрицы $L_{1,48}(\tilde{\zeta}_T)$

(без заголовка)

Здесь показаны 96 собственных значения матрицы $L_{1,96}(\tilde{\zeta}_T)$

(без заголовка)

Здесь показаны 192 собственных значения матрицы $L_{1,192}(\tilde{\zeta}_T)$

(без заголовка)

Здесь напоминается, как выглядят 24 собственных значения матрицы $L_{1,24}$

(без заголовка)

Здесь напоминается, как выглядят 48 собственных значения матрицы $L_{1,48}$

(без заголовка)

Здесь напоминается, как выглядят 96 собственных значения матрицы $L_{1,96}$

(без заголовка)

Здесь напоминается, как выглядят 192 собственных значения матрицы $L_{1,192}$

(без заголовка)

Здесь для наглядного сравнения одновременно показаны 24 собственных значения матрицы $L_{1,24}$ (голубые точки) и 24 собственных значения матрицы $L_{1,24}(\tilde{\zeta}_T)$ (черные точки).

(без заголовка)

Здесь для наглядного сравнения одновременно показаны 48 собственных значения матрицы $L_{1,48}$ (голубые точки) и 48 собственных значения матрицы $L_{1,48}(\tilde{\zeta}_T)$ (черные точки).

(без заголовка)

Здесь для наглядного сравнения одновременно показаны 96 собственных значения матрицы $L_{1,96}$ (голубые точки) и 96 собственных значения матрицы $L_{1,96}(\tilde{\zeta}_T)$ (черные точки).

(без заголовка)

Здесь для наглядного сравнения одновременно показаны 192 собственных значения матрицы $L_{1,192}$ (голубые точки) и 192 собственных значения матрицы $L_{1,192}(\tilde{\zeta}_T)$ (черные точки).

Почему верны подгипотезы RH_2, RH_3, \dots ?

Ряд Тейлора не чувствует второй полюс, но можно убить первые $k - 1$ нулей и применить те же рассуждения к получающейся функции. Более интересным, однако, представляется другой подход, при котором первые рассматриваются “на равных”.

Приближения Padé

Имея k свободных параметров в числителе и m свободных параметров в знаменателе, мы можем аппроксимировать функцию с точностью до $O(w^{k+m+1})$.

Приближения Padé – случай $k = 1$

Из рассмотренных выше свойств ряда Тейлора следует, что приближения Padé с линейным числителем “чувствуют” первый нуль функции.

Приближения Padé – случай произвольного k

Теорема de Montessus говорит, что приближения Padé с многочленом k -ой степени в числителе “чувствуют” первые k нулей функции.

Слабые подгипотезы

Мы будем следить только за старшим коэффициентом многочлена в числителе приближения Padé. С помощью теоремы de Montessus можно показать, что этого достаточно для получения (в пределе) всей гипотезы Римана.

Новые определители

Новые собственные числа

(без заголовка)

Здесь показаны 24 собственных значения матрицы $L_{2,24}$

(без заголовка)

Здесь показаны 48 собственных значения матрицы $L_{2,48}$

(без заголовка)

Здесь показаны 96 собственных значения матрицы $L_{2,96}$

(без заголовка)

Здесь показаны 192 собственных значения матрицы $L_{2,192}$

(анимация 2)

Чтобы увидеть "тайную жизнь" дзета-функции Римана, надо посмотреть собственные значения матриц $L_{2,1}, L_{2,2}, L_{2,3}, \dots$ в быстрой последовательности. В Acrobat под Windows для этого надо находиться в режим Full Screen, войти в который можно нажав CTRL-L.

(без заголовка)

Здесь показаны 24 собственных значения матрицы $L_{3,24}$

(без заголовка)

Здесь показаны 48 собственных значения матрицы $L_{3,48}$

(без заголовка)

Здесь показаны 96 собственных значения матрицы $L_{3,96}$

(без заголовка)

Здесь показаны 192 собственных значения матрицы $L_{3,192}$

(анимация 3)

Чтобы увидеть "тайную жизнь" дзета-функции Римана, надо просмотреть собственные значения матриц $L_{3,1}, L_{3,2}, L_{3,3}, \dots$ в быстрой последовательности. В Acrobat под Windows для этого надо находиться в режим Full Screen, войти в который можно нажав CTRL-L.

(без заголовка)

Здесь показаны 24 собственных значения матрицы $L_{4,24}$

(без заголовка)

Здесь показаны 48 собственных значения матрицы $L_{4,48}$

(без заголовка)

Здесь показаны 96 собственных значения матрицы $L_{4,96}$

(без заголовка)

Здесь показаны 192 собственных значения матрицы $L_{4,192}$

(анимация 4)

Чтобы увидеть "тайную жизнь" дзета-функции Римана, надо просмотреть собственные значения матриц $L_{4,1}, L_{4,2}, L_{4,3}, \dots$ в быстрой последовательности. В Acrobat под Windows для этого надо находиться в режим Full Screen, войти в который можно нажав CTRL-L.

(без заголовка)

Здесь показаны 24 собственных значения матрицы $L_{5,24}$

(без заголовка)

Здесь показаны 48 собственных значения матрицы $L_{5,48}$

(без заголовка)

Здесь показаны 96 собственных значения матрицы $L_{5,96}$

(без заголовка)

Здесь показаны 192 собственных значения матрицы $L_{5,192}$

(анимация 5)

Чтобы увидеть "тайную жизнь" дзета-функции Римана, надо посмотреть собственные значения матриц $L_{5,1}, L_{5,2}, L_{5,3}, \dots$ в быстрой последовательности. В Acrobat под Windows для этого надо находиться в режим Full Screen, войти в который можно нажав CTRL-L.

(без заголовка)

Здесь показаны 24 собственных значения матрицы $L_{6,24}$

(без заголовка)

Здесь показаны 48 собственных значения матрицы $L_{6,48}$

(без заголовка)

Здесь показаны 96 собственных значения матрицы $L_{6,96}$

(без заголовка)

Здесь показаны 192 собственных значения матрицы $L_{6,192}$

(анимация 6)

Чтобы увидеть "тайную жизнь" дзета-функции Римана, надо посмотреть собственные значения матриц $L_{6,1}, L_{6,2}, L_{6,3}, \dots$ в быстрой последовательности. В Acrobat под Windows для этого надо находиться в режим Full Screen, войти в который можно нажав CTRL-L.

Для любого представляются справедливыми предположения о существовании и свойствах предельных вероятностей λ_k , аналогичных сделанным выше предположениям о предельной вероятности λ_1 .

Новые матрицы

Мы можем переставить столбцы теплицевой матрицы $L_{k,m}$ и получить ганкелеву матрицу с таким же (по абсолютной величине) значением определителя. Собственные значения этой матрицы все будут вещественными. Вычисления показали, что при росте часть собственных чисел стремится к бесконечности, а часть – к нулю. По этой причине естественно изображать не сами собственные числа, а логарифмы их абсолютных величин.

(анимация 7)

Чтобы увидеть "тайную жизнь" дзета-функции Римана, надо посмотреть логарифмы абсолютных величин собственных значений матриц $M_{1,1}, M_{1,2}, M_{1,3}, \dots$ в быстрой последовательности. В Acrobat под Windows для

этого надо находиться в режим Full Screen, войти в который можно нажав CTRL-L.

(без заголовка)

Здесь одновременно представлены собственные значения матриц $M_{1,1}$, $M_{1,2}$, $M_{1,3}, \dots$, собственному числу μ матрицы $M_{1,m}$ соответствует точка с координатами $(x, y) = (\ln(|\mu|), ct)$.

(анимация 8)

Чтобы увидеть "тайную жизнь" дзета-функции Римана, надо просмотреть логарифмы абсолютных величин собственных значений матриц $M_{2,1}$, $M_{2,2}$, $M_{2,3}, \dots$ в быстрой последовательности. В Acrobat под Windows для этого надо находиться в режим Full Screen, войти в который можно нажав CTRL-L.

(без заголовка)

Здесь одновременно представлены собственные значения матриц $M_{2,1}$, $M_{2,2}$, $M_{2,3}, \dots$, собственному числу μ матрицы $M_{2,m}$ соответствует точка с координатами $(x, y) = (\ln(|\mu|), ct)$.

(анимация 9)

Чтобы увидеть "тайную жизнь" дзета-функции Римана, надо просмотреть логарифмы абсолютных величин собственных значений матриц $M_{3,1}$, $M_{3,2}$, $M_{3,3}, \dots$ в быстрой последовательности. В Acrobat под Windows для этого надо находиться в режим Full Screen, войти в который можно нажав CTRL-L.

(без заголовка)

Здесь одновременно представлены собственные значения матриц $M_{3,1}$, $M_{3,2}$, $M_{3,3}, \dots$, собственному числу μ матрицы $M_{3,m}$ соответствует точка с координатами $(x, y) = (\ln(|\mu|), ct)$.

(анимация 10)

Чтобы увидеть "тайную жизнь" дзета-функции Римана, надо просмотреть логарифмы абсолютных величин собственных значений матриц $M_{4,1}$, $M_{4,2}$, $M_{4,3}, \dots$ в быстрой последовательности. В Acrobat под Windows для этого надо находиться в режим Full Screen, войти в который можно нажав CTRL-L.

(без заголовка)

Здесь одновременно представлены собственные значения матриц $M_{4,1}$, $M_{4,2}, M_{4,3}, \dots$, собственному числу μ матрицы $M_{4,m}$ соответствует точка с координатами $(x, y) = (\ln(|\mu|), ct)$.

(анимация 11)

Чтобы увидеть "тайную жизнь" дзета-функции Римана, надо посмотреть логарифмы абсолютных величин собственных значений матриц $M_{5,1}$, $M_{5,2}, M_{5,3}, \dots$ в быстрой последовательности. В Acrobat под Windows для этого надо находиться в режим Full Screen, войти в который можно нажав CTRL-L.

(без заголовка)

Здесь одновременно представлены собственные значения матриц $M_{5,1}$, $M_{5,2}, M_{5,3}, \dots$, собственному числу μ матрицы $M_{5,m}$ соответствует точка с координатами $(x, y) = (\ln(|\mu|), ct)$.

(анимация 12)

Чтобы увидеть "тайную жизнь" дзета-функции Римана, надо посмотреть логарифмы абсолютных величин собственных значений матриц $M_{6,1}$, $M_{6,2}, M_{6,3}, \dots$ в быстрой последовательности. В Acrobat под Windows для этого надо находиться в режим Full Screen, войти в который можно нажав CTRL-L.

(без заголовка)

Здесь одновременно представлены собственные значения матриц $M_{6,1}$, $M_{6,2}, M_{6,3}, \dots$, собственному числу μ матрицы $M_{6,m}$ соответствует точка с координатами $(x, y) = (\ln(|\mu|), ct)$.

Распределения

(без заголовка)

Здесь показаны функции распределения $F_{1,32}(x)$, $F_{1,64}(x)$, $F_{1,128}(x)$ и $F_{1,256}(x)$.

Естественным кажется предположение о существовании предельного (при $t \rightarrow \infty$) распределения $F_1(x)$.

(без заголовка)

Здесь показаны функции распределения $F_{2,32}(x)$, $F_{2,64}(x)$, $F_{2,128}(x)$ и $F_{2,256}(x)$.

Естественным кажется предположение о существовании предельного (при $t \rightarrow \infty$) распределения $F_2(x)$.

(без заголовка)

Здесь показаны функции распределения $F_{3,32}(x)$, $F_{3,64}(x)$, $F_{3,128}(x)$ и $F_{3,256}(x)$.

Естественным кажется предположение о существовании предельного (при $t \rightarrow \infty$) распределения $F_3(x)$.

(без заголовка)

Здесь показаны функции распределения $F_{4,32}(x)$, $F_{4,64}(x)$, $F_{4,128}(x)$ и $F_{4,256}(x)$.

Естественным кажется предположение о существовании предельного (при $t \rightarrow \infty$) распределения $F_4(x)$.

(без заголовка)

Здесь показаны функции распределения $F_{5,32}(x)$, $F_{5,64}(x)$, $F_{5,128}(x)$ и $F_{5,256}(x)$.

Естественным кажется предположение о существовании предельного (при $t \rightarrow \infty$) распределения $F_5(x)$.

(без заголовка)

Здесь показаны функции распределения $F_{6,32}(x)$, $F_{6,64}(x)$, $F_{6,128}(x)$ и $F_{6,256}(x)$.

Естественным кажется предположение о существовании предельного (при $t \rightarrow \infty$) распределения $F_6(x)$.

Сравнение всех приведенных графиков приводит к очень неожиданному предположению – *предельная функция распределения не зависит от количества принимаемых в рассмотрение начальных нулей: $F_1(x) = F_2(x) = F_3(x) \dots$*