

Тайная жизнь дзета-функции Римана

Ю.В.МАТИЯСЕВИЧ

[http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/
personaljournal/zetahiddenlife](http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/personaljournal/zetahiddenlife)

Дзета функция Римана

Ряд Дирихле:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots + n^{-s} + \dots$$

Ряд сходится при $s > 1$ и расходится при $s = 1$

Произведение Эйлера:

$$\zeta(s) = \prod_{p - \text{простое}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Доказательство.

$$\prod_{p - \text{простое}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{p - \text{простое}} (1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \dots)$$

Basel Problem (Pietro Mingoli, 1644)

Чему равна сумма $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$?

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \zeta(2) = 1.64493406684822644 \dots$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Л. Эйлер дал первое "доказательство" в 1735 году

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \\ &= \dots \left(1 - \frac{x}{-2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{-\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots \end{aligned}$$

Другое доказательство

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}(x) - \frac{1}{x} &= \dots + \frac{1}{x - (-2)\pi} + \frac{1}{x - (-1)\pi} + \frac{1}{x - \pi} + \frac{1}{x - 2\pi} \dots \\ &= \frac{2x}{x^2 - \pi^2} + \frac{2x}{x^2 - 4\pi^2} + \frac{2x}{x^2 - 9\pi^2} \dots \\ &= -\frac{2}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2} + \left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)^3 + \dots \right) \\ &= -\frac{2\zeta(2)}{\pi^2}x - \frac{2\zeta(4)}{\pi^4}x^3 - \frac{2\zeta(6)}{\pi^6}x^4 - \dots\end{aligned}$$

$$\zeta(2k) = \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{d^{2k}}{dx^{2k}} (1 - \operatorname{ctg}(x)) \Big|_{x=0} \right) \pi^{2k}$$

Другие значения $\zeta(s)$

$$\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2 = \frac{2^1}{2!}B_2\pi^2$$

$$\zeta(4) = \frac{1}{90}\pi^4 = -\frac{2^3}{4!}B_4\pi^4$$

$$\zeta(6) = \frac{1}{945}\pi^6 = \frac{2^5}{6!}B_6\pi^6$$

$$\zeta(8) = \frac{1}{9450}\pi^8 = -\frac{2^7}{8!}B_8\pi^8$$

$$\zeta(10) = \frac{691}{638512875}\pi^{10} = \frac{2^9}{10!}B_{10}\pi^{10}$$

$$\zeta(12) = \frac{2}{18243225}\pi^{12} = -\frac{2^{11}}{12!}B_{12}\pi^{12}$$

$$\zeta(14) = \frac{3617}{325641566250}\pi^{14} = \frac{2^{13}}{14!}B_{14}\pi^{14}$$

Числа Бернулли

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \\ B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_9 = 0, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{11} = 0, \dots$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B_k x^k$$

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{-x}{e^{-x} - 1} + \frac{-x}{2}$$

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k} \pi^{2k}$$

Еще другие значения $\zeta(s)$

$$\zeta(0) = 1^0 + 2^0 + 3^0 + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = -\frac{1}{2}$$

$$\zeta(-1) = 1^1 + 2^1 + 3^1 + \dots = 1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$$

$$\zeta(-2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots = 1 + 4 + 9 + \dots = 0$$

$$\zeta(-3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots = 1 + 8 + 27 + \dots = \frac{1}{120}$$

Почему такое значение $\zeta(0)$

$$\begin{aligned}(1 - 2 \cdot 2^{-s})\zeta(s) &= (1 - 2 \cdot 2^{-s})(1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + \dots) \\ &= 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + \dots \\ &\quad - 2 \cdot 2^{-s} - 2 \cdot 4^{-s} - \dots \\ &= 1^{-s} - 2^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1 - 2)\zeta(0) &= 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = S \\ &= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S\end{aligned}$$

$$S = 1 - S \quad S = \frac{1}{2} \quad \zeta(0) = 1 + 1 + \dots = -\frac{1}{2}$$

Почему такие значения $\zeta(-1), \zeta(-2), \zeta(-3), \dots$

$$\begin{aligned}(1-2)\zeta(0) &= 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ &= \lim_{t \rightarrow -0} (e^t - e^{2t} + e^{3t} - e^{4t} + \dots) \\ &= \lim_{t \rightarrow -0} \frac{e^t}{1 + e^t} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1 - 2 \cdot 2^m)\zeta(-m) &= 1^m - 2^m + 3^m - 4^m + \dots \\ &= \lim_{t \rightarrow -0} \frac{d^m}{dt^m} (e^t - e^{2t} + e^{3t} - e^{4t} + \dots) \\ &= \lim_{t \rightarrow -0} \frac{d^m}{dt^m} \frac{e^t}{1 + e^t}\end{aligned}$$

$$\zeta(-m) = -\frac{B_{m+1}}{2m+2}$$

$$0 = \zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \dots$$

Функциональное уравнение

$$\zeta(-m) = -\frac{B_{m+1}}{2m+2} \quad \zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k} \pi^{2k}$$

$$\zeta(1-2k) = (-1)^k 2^{1-2k} \pi^{-2k} (2k-1)! \zeta(2k)$$

Дзета функция Римана

Ряд Дирихле:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

Произведение Эйлера:

$$\zeta(z) = \prod_{p - \text{простое}} \frac{1}{1 - p^{-z}}$$

Ряд и произведение сходятся при for $\Re(z) > 1$.

Точка $z = 1$ является единственным полюсом $\zeta(z)$.

Точки $z_1 = -2, z_2 = -4, \dots, z_k = -2k, \dots$ являются *тривиальными* нулями $\zeta(z)$.

$$\zeta(1 - z) = \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) 2^{1-z} \pi^{-z} \Gamma(z) \zeta(z)$$

Распределение простых чисел

$\pi(x)$ = количество простых чисел, не больших x

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)} \quad \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} \rightarrow_{x \rightarrow \infty} 1$$

$$\pi(x) - \frac{x}{\ln(x)} \quad \pi(x) - \int \frac{1}{\ln(t)} dt$$

Функция Чебышева $\theta(x)$

$$\pi(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p - \text{простое}}} 1 \qquad \theta(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p - \text{простое}}} \ln(p)$$

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)} \Leftrightarrow \theta(x) \approx x$$

$$\pi(x) - \int^x \frac{1}{\ln(t)} dt \qquad \theta(x) - x$$

Функция Чебышева $\psi(x)$

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \sum_{\substack{p \leq x \\ p - \text{простое}}} 1 & \psi(x) &= \sum_{\substack{p \leq x \\ p - \text{степень} \\ \text{простого}}} \ln(p) \\ & & &= \ln(\text{LCM}(1, 2, \dots, \lfloor x \rfloor))\end{aligned}$$

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)} \Leftrightarrow \psi(x) \approx x \quad \psi(x) - x$$

Теорема (von Mangoldt [1895]).

$$\psi(x) - x = - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} + \sum_n \frac{x^{-2n}}{2n} - \ln(2\pi)$$

Гипотеза Римана

Гипотеза Римана (версия 1). *Все нетривиальные нули функции $\zeta(z)$ лежат на критической прямой $\Re(z) = \frac{1}{2}$.*

Гипотеза Римана (версия 2).

$$\psi(x) - x = O(\sqrt{x} \ln(x)^2)$$

Гипотеза Римана (версия 3).

$$\pi(x) - \int^x \frac{1}{\ln(t)} dt = O(\sqrt{x} \ln(x))$$

Функция Римана $\xi(z)$

$$\zeta(1-z) = \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) 2^{1-z} \pi^{-z} \Gamma(z) \zeta(z)$$

$$\xi(z) = \pi^{-\frac{z}{2}} (z-1) \Gamma\left(1 + \frac{z}{2}\right) \zeta(z).$$

$$\xi(1-z) = \xi(z)$$

Нулями функции $\xi(z)$ являются все тривиальные нули функции $\zeta(z)$, и только они.

$$\zeta^*(z) = 2(z-1)\zeta(z) \quad \zeta^*(0) = 1$$

Гипотеза Римана (версия 4). *Тривиальные нули*

$z_1 = -2, z_2 = -4, \dots, z_k = -2k, \dots$ являются единственными нулями функции $\zeta^(z)$, лежащими в полуплоскости $\Re(z) < \frac{1}{2}$.*

Замена переменной

$$w = \frac{z}{1-z} \qquad z = \frac{w}{w+1}$$

$$z_1 = -2, z_2 = -4, \dots, z_k = -2k, \dots$$

$$w_1 = \frac{z_1}{1-z_1} = -\frac{2}{3}, w_2 = \frac{z_2}{1-z_2} = -\frac{4}{5}, \dots, w_k = \frac{z_k}{1-z_k} = -\frac{2k}{2k+1}, \dots$$

$$\tilde{\zeta}(w) = \zeta^*\left(\frac{w}{w+1}\right)$$

Гипотеза Римана (версия 5). Тривиальные нули

$w_1 = -\frac{2}{3}, w_2 = -\frac{4}{5}, \dots, w_k = -\frac{2k}{2k+1}, \dots$ являются

единственными нулями функции $\tilde{\zeta}(w)$, лежащими в открытом круге $|w| < 1$.

Подгипотезы

RH_k , k -я подгипотеза Римана (версия 1). Тривиальные нули $w_1 = -\frac{2}{3}, w_2 = -\frac{4}{5}, \dots, w_l = -\frac{2k}{2k+1}$ являются единственными нулями функции $\tilde{\zeta}(w)$, лежащими в замкнутом круге $|w| < \frac{2k+1}{2k+2}$.

Гипотеза Римана (версия 6). Подгипотеза RH_k верна для $k = 1, 2, \dots$:

$$RH \Leftrightarrow RH_1 \& RH_2 \& RH_3 \dots$$

Почему верна подгипотеза \mathcal{RH}_1 ?

$$1/\tilde{\zeta}(w) = 1 + \tau_1 w + \cdots + \tau_m w^m + \dots$$

\mathcal{RH}_1 (версия 2). При $n \rightarrow \infty$

$$\tau_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n (R_1 + o(1))$$

для некоторой ненулевой константы R_1 .

$$\tilde{\zeta}(w) = 1 + \theta_1 w + \cdots + \theta_k w^k + \dots$$

Определители

$$L_{1,m} = \begin{pmatrix} \theta_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \theta_2 & \theta_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \theta_3 & \theta_2 & \theta_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_{m-1} & \theta_{m-2} & \theta_{m-3} & \dots & \theta_1 & 1 \\ \theta_m & \theta_{m-1} & \theta_{m-2} & \dots & \theta_2 & \theta_1 \end{pmatrix}.$$

$$\tau_m = (-1)^m \det(L_{1,m})$$

Подгипотеза RH_1 (версия 3). При $m \rightarrow \infty$

$$\det(L_{1,m}) = \left(\frac{3}{2}\right)^m (R_1 + o(1))$$

для некоторой ненулевой константы R_1 .

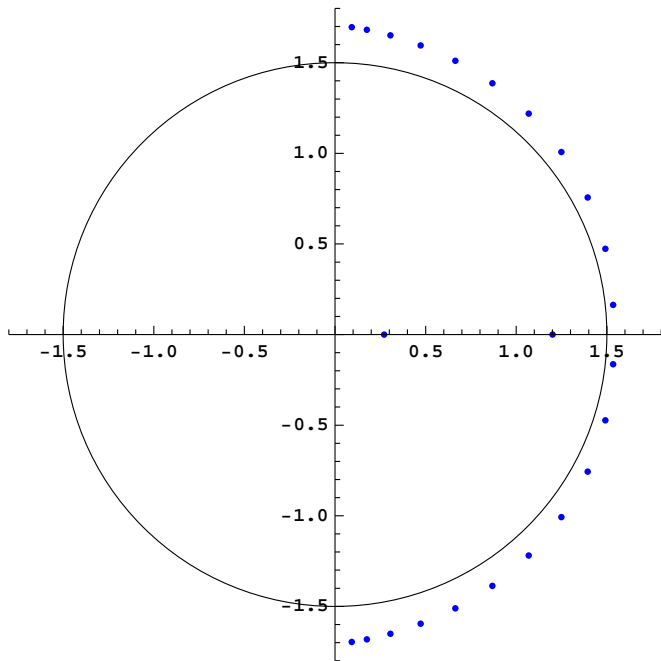
Собственные числа

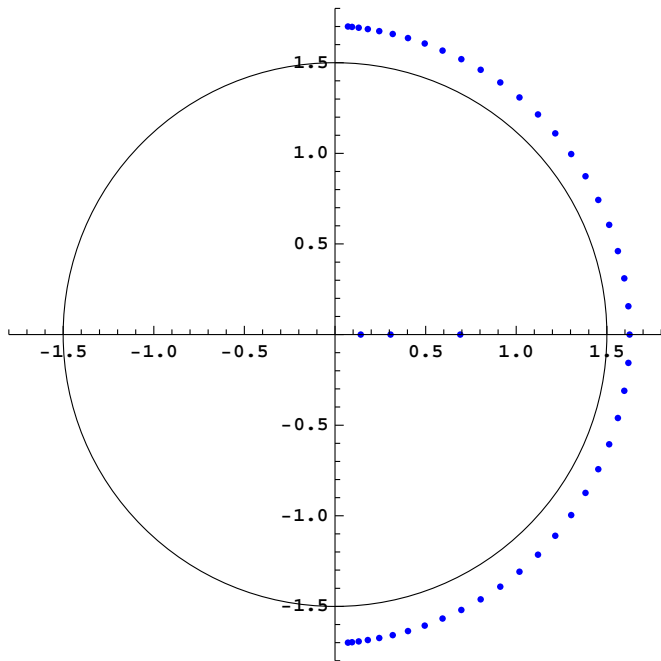
$$\det(L_{1,m}) = \lambda_{1,m,1} \lambda_{1,m,2} \dots \lambda_{1,m,m}$$

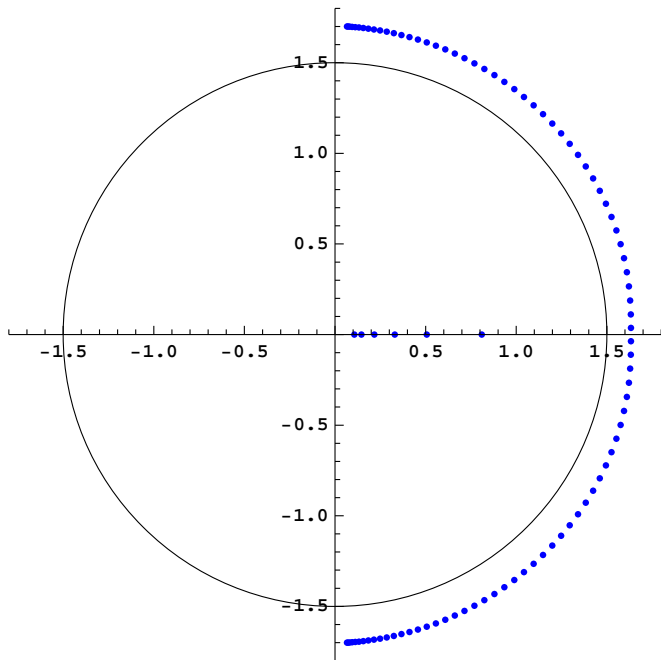
где $\lambda_{1,m,1}, \lambda_{1,m,2}, \dots, \lambda_{1,m,m}$ – собственные числа матрицы $L_{1,m}$

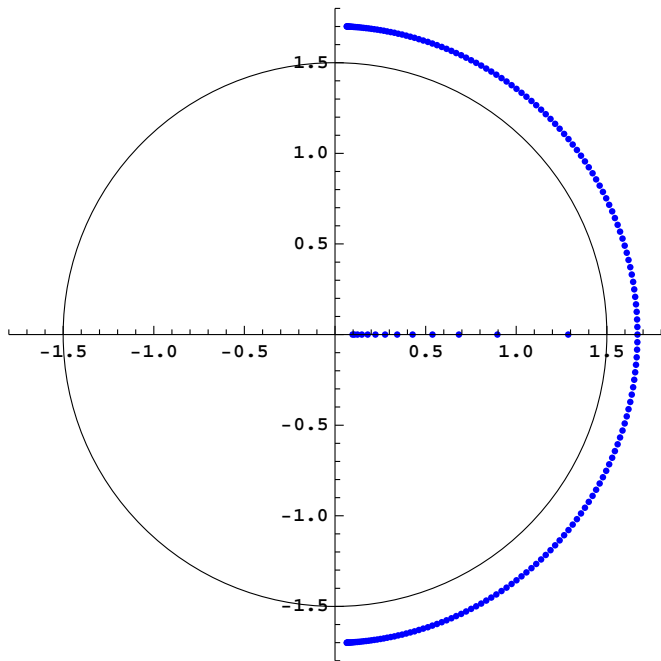
Подгипотеза RH₁ (версия 3). При $m \rightarrow \infty$

$$\left(\prod_{n=1}^m \lambda_{1,m,n} \right)^{\frac{1}{m}} \rightarrow \frac{3}{2}.$$









См. Анимация 1 (файл zetalambda1.pdf)

Предположение

Поместим вес $\frac{1}{m}$ в каждую из точек $\lambda_{1,m,1}, \lambda_{1,m,2}, \dots, \lambda_{1,m,m}$ и обозначим через $\lambda_{1,m}$ соответствующую дискретную меру.

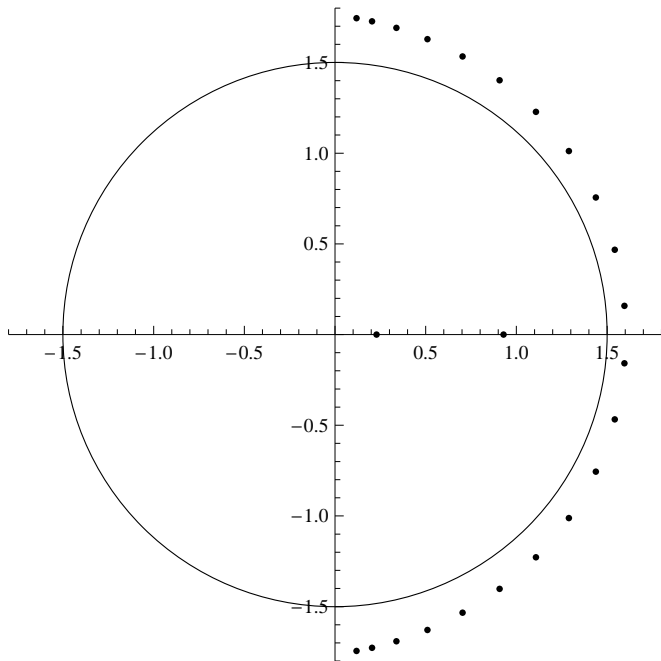
Тогда

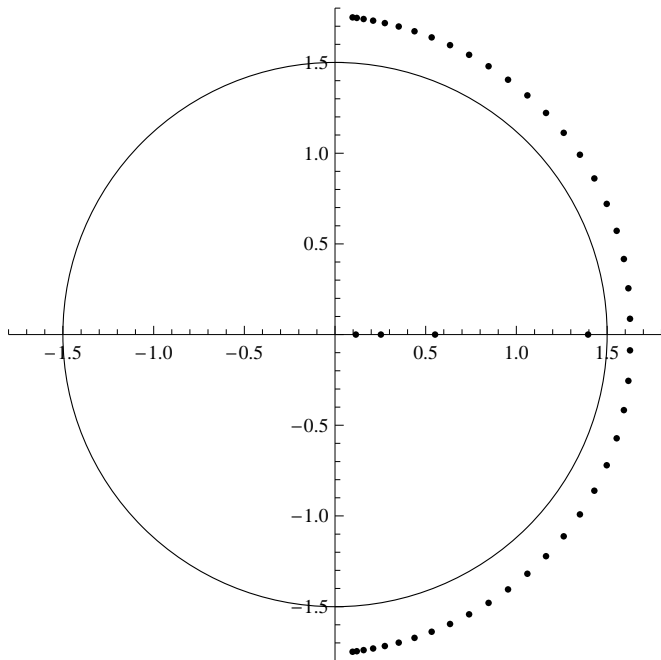
- ▶ существует предельная мера λ_1 , сосредоточенная на “предельном луке” и “предельной стреле”
- ▶ $\int \log(w) d\lambda_1 = \log\left(\frac{3}{2}\right)$

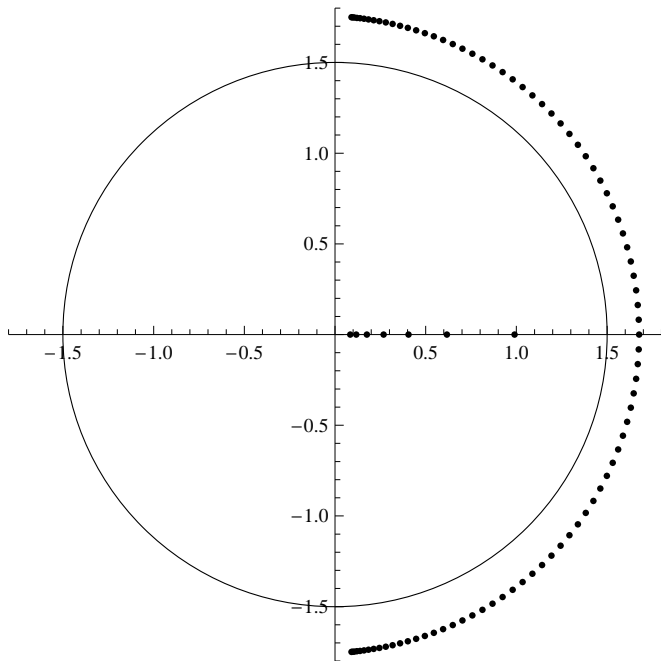
Только тривиальные нули

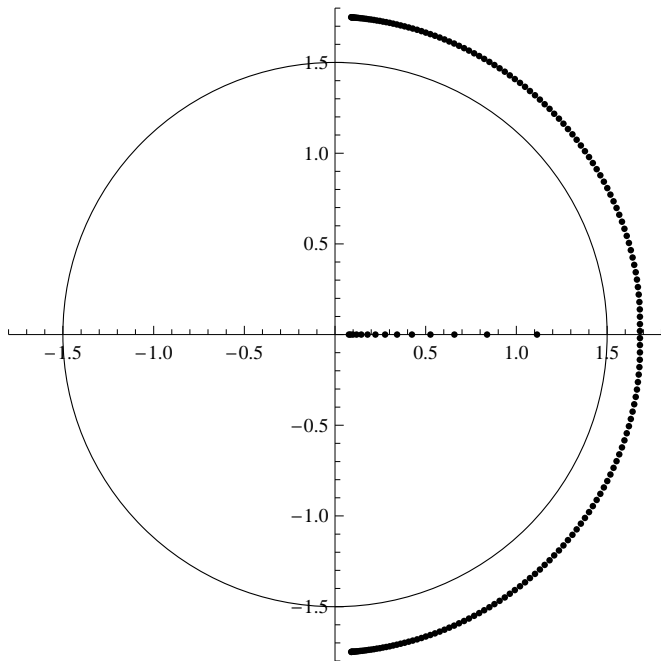
$$\zeta_{\text{T}}(z) = \frac{\zeta^*(z)}{2\xi(z)} = \frac{\pi^{\frac{z}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{z}{2})} \quad \zeta_{\text{T}}(0) = 1$$

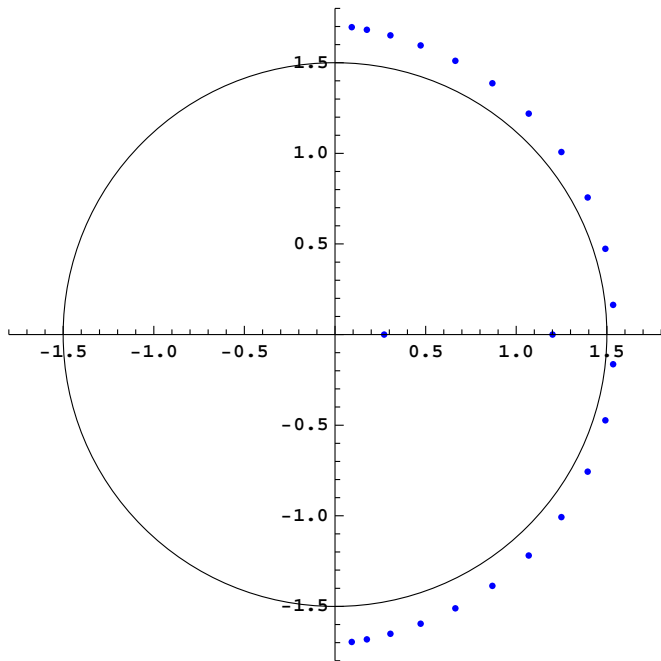
$$\tilde{\zeta}_{\text{T}}(w) = \zeta_{\text{T}}\left(\frac{w}{1+w}\right)$$

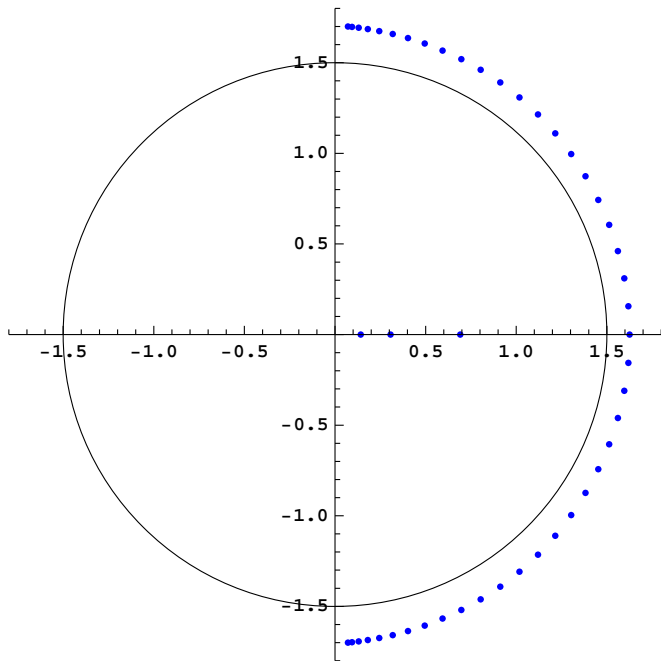


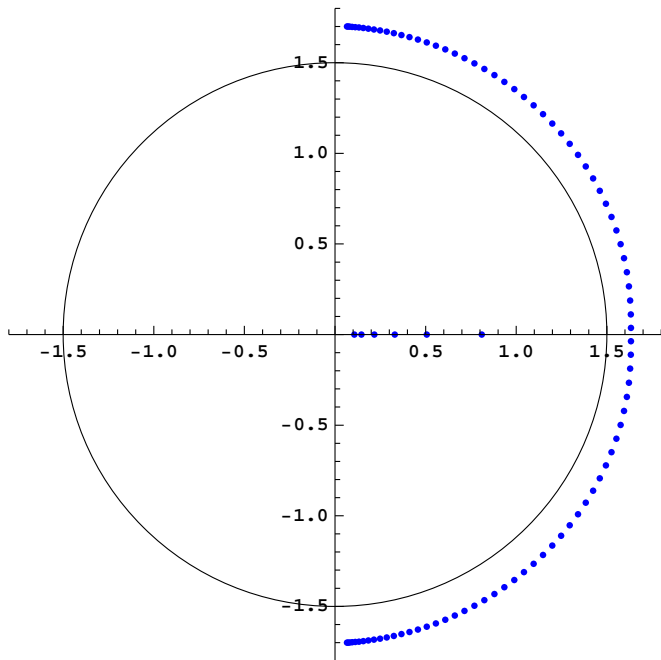


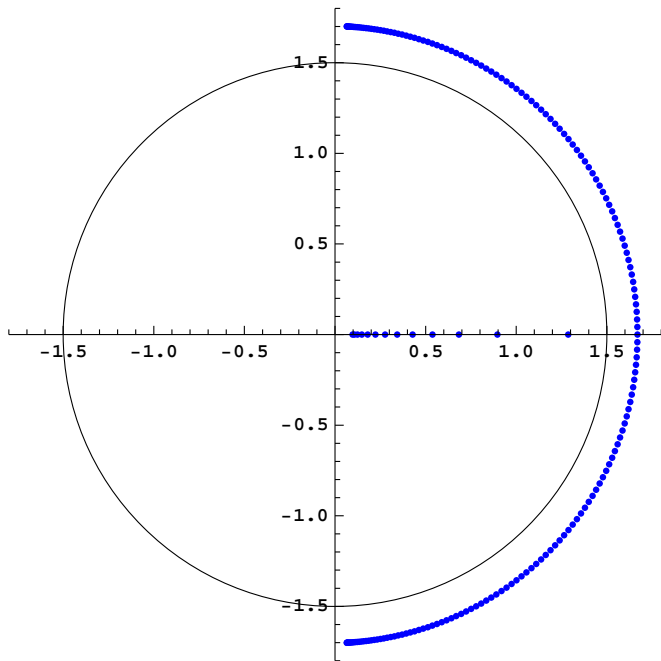


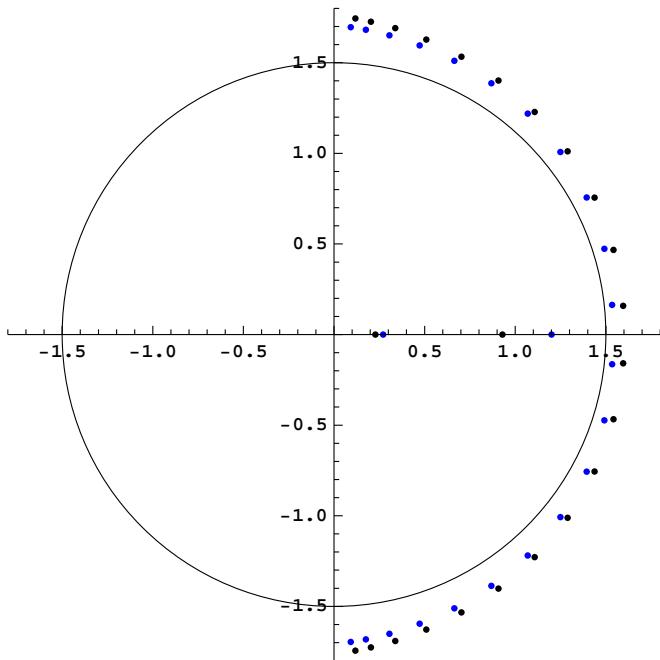


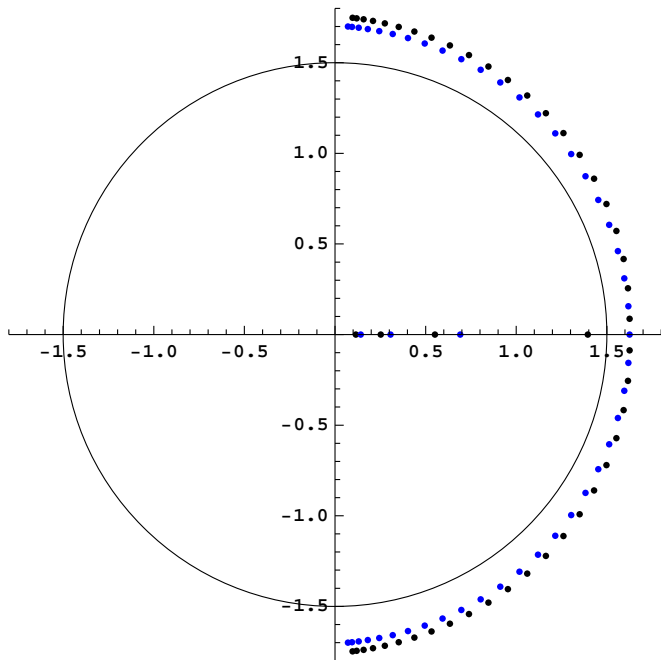


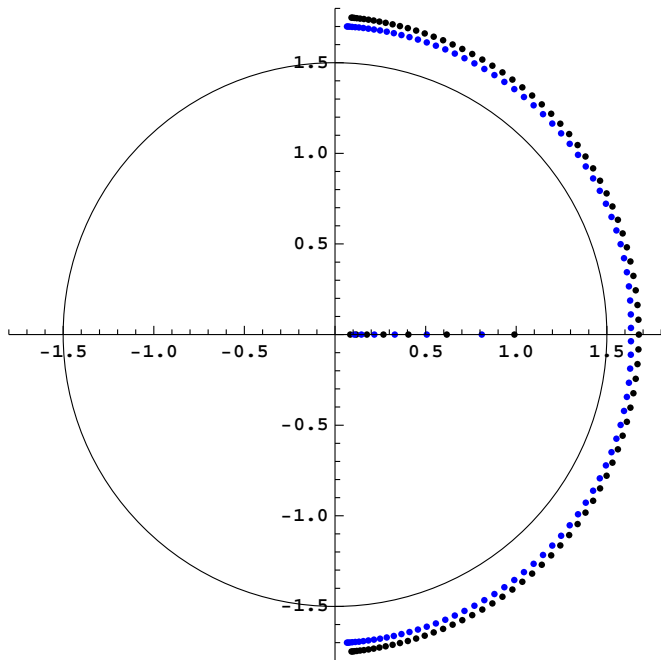


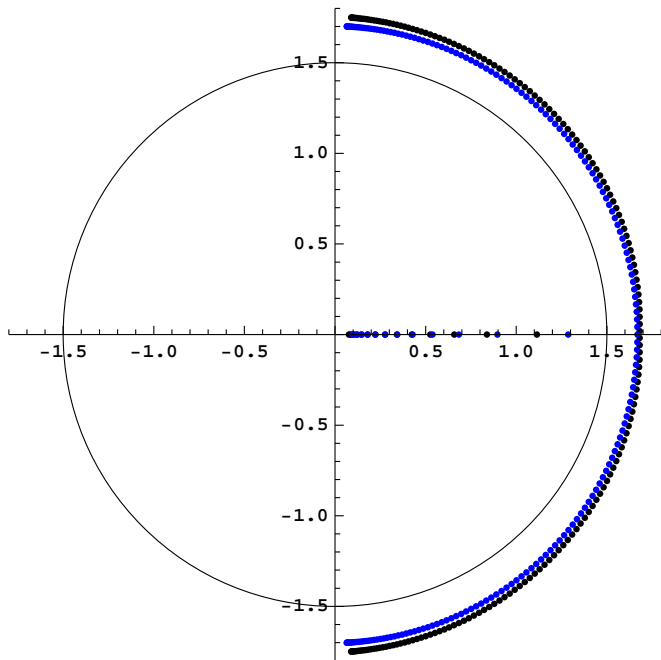












Почему верны подгипотезы $\text{RH}_2, \text{RH}_3, \dots$?

$$\frac{\zeta^*(z)}{\prod_{n=1}^{k-1} (1 - \frac{z}{z_n})}$$

Приближения Padé

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}(w) &\approx \frac{P_{k,m}(w)}{Q_{k,m}(w)} = \frac{1 + p_{k,m,1}w + \cdots + p_{k,m,k}w^k}{1 + q_{k,m,k}w + \cdots + q_{k,m,m}w^m} \\ &= \tilde{\zeta}(w) + O(w^{k+m+1})\end{aligned}$$

Приближения Padé – случай $k = 1$

$$\tilde{\zeta}(w) \approx \frac{P_{1,m}(w)}{Q_{1,m}(w)} = \frac{1 + \rho_{1,m,1}w}{1 + q_{k,m,k}w + \cdots + q_{k,m,m}w^m}$$

$$\rho_{1,m,1} = -\frac{\tau_{m+1}}{\tau_m}$$

$$1/\tilde{\zeta}(w) = 1 + \tau_1 w + \cdots + \tau_m w^m + \dots$$

$$\text{RH}_1 \Rightarrow \rho_{1,m,1} = -\frac{\tau_{m+1}}{\tau_m} \rightarrow \frac{3}{2}$$

$$\text{RH}_1 \Rightarrow P_{1,m}(w) \rightarrow 1 + \frac{3}{2}w = 1 - \frac{w}{w_1}$$

Приближения Padé – случай произвольного k

$$\tilde{\zeta}(w) \approx \frac{P_{k,m}(w)}{Q_{k,m}(w)} = \frac{1 + p_{k,m,1}w + \cdots + p_{k,m,k}w^k}{1 + q_{k,m,k}w + \cdots + q_{k,m,m}w^m}$$

Следствия теоремы de Montessus [1902]:

$$\text{RH}_k \implies P_{k,m} \rightarrow \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{w}{w_j}\right)$$

$$\text{RH}_k \implies p_{k,m,k} \rightarrow \prod_{j=1}^k \left(-\frac{1}{w_j}\right) = \prod_{j=1}^k \frac{2j+1}{2j}$$

Слабые подгипотезы

Подгипотеза RH_k^w , ослабленный вариант RH_k (версия 1).

При $m \rightarrow \infty$

$$\rho_{k,m,k} \rightarrow \prod_{j=1}^k \left(-\frac{1}{w_j} \right) = \prod_{j=1}^k \frac{2j+1}{2j}$$

Гипотеза Римана (версия 7). Подгипотеза RH_k^w верна для $k = 1, 2, \dots$:

$$\text{RH} \Leftrightarrow \text{RH}_1^w \ \& \ \text{RH}_2^w \ \& \ \text{RH}_3^w \ \dots$$

Новые определители

$$\frac{P_{k,m}(z)}{Q_{k,m}(z)} = \frac{1 + p_{k,m,1}w + \cdots + p_{k,m,k}w^k}{1 + q_{k,m,1}w + \cdots + q_{k,m,m}w^m} = \tilde{\zeta}(w) + O(w^{k+m+1})$$

Теорема С. Г. Я. Якоби [1846].

$$p_{k,m,k} = \frac{\det(L_{k,m+1})}{\det(L_{k,m})}$$

где

$$L_{k,m} = \begin{pmatrix} \theta_k & \theta_{k-1} & \cdots & \theta_{k-m+1} \\ \theta_{k+1} & \theta_k & \cdots & \theta_{k-m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{k+m-1} & \theta_{k+m-2} & \cdots & \theta_k \end{pmatrix}$$

и $\theta_j = 0$ при $j < 0$

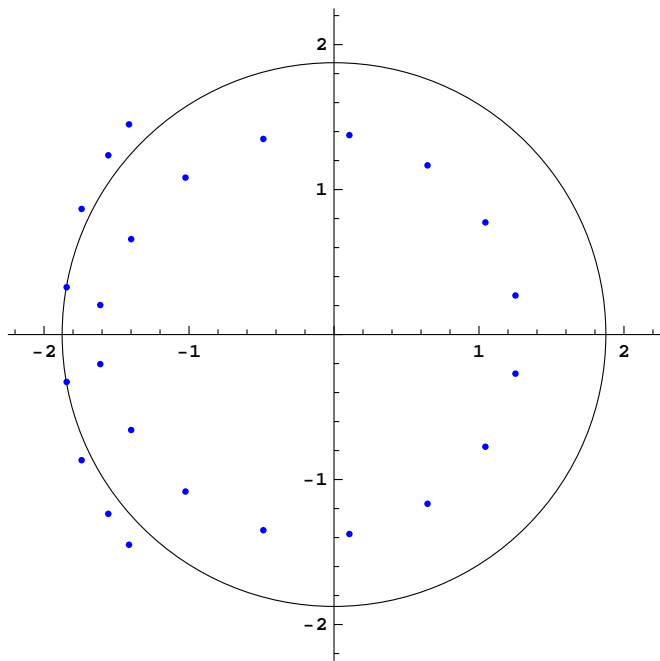
Новые собственные числа

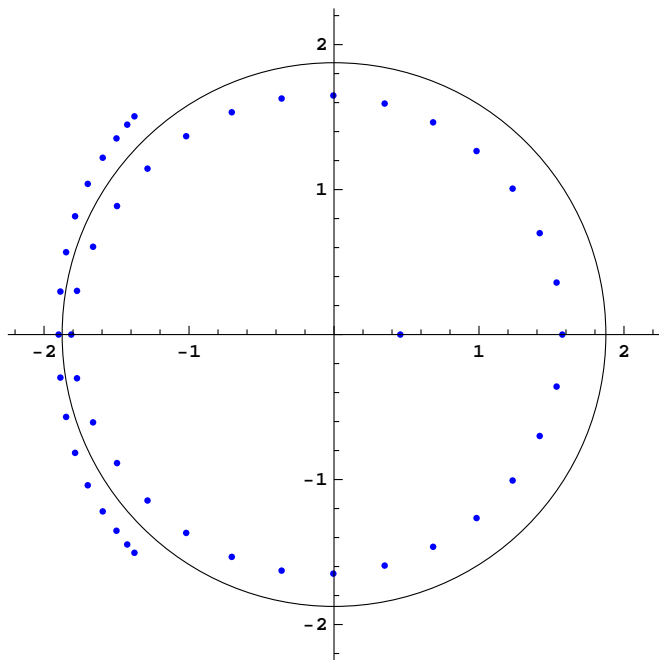
$$\det(L_{k,m}) = \lambda_{k,m,1} \lambda_{k,m,2} \cdots \lambda_{k,m,m},$$

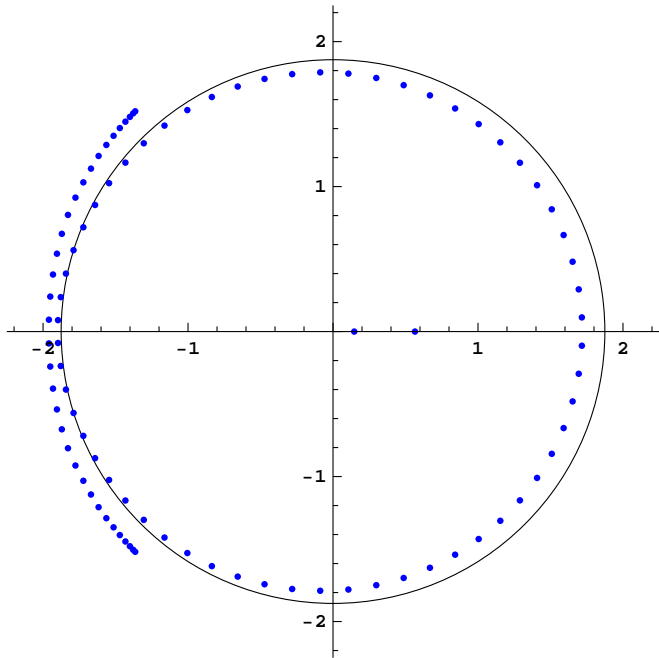
где $\lambda_{k,m,1}, \lambda_{k,m,2}, \dots, \lambda_{k,m,m}$ – собственные числа матрицы $L_{k,m}$

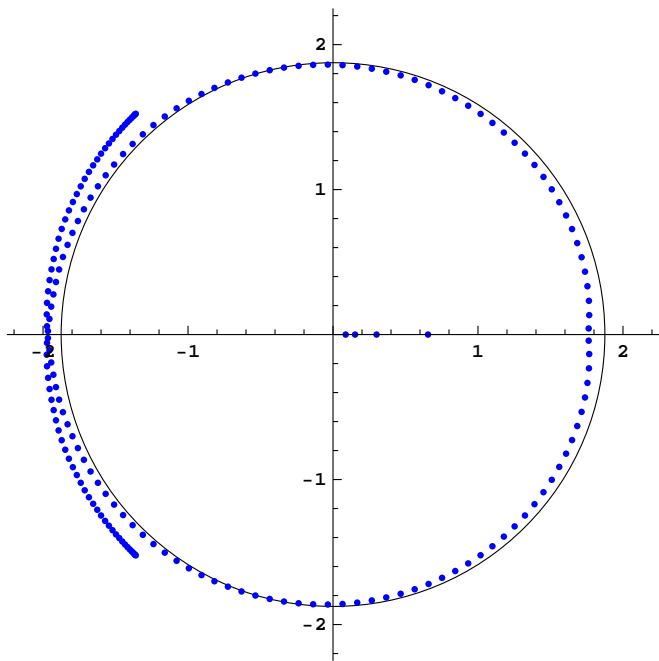
Подгипотеза RH_k^w (версия 3). При $m \rightarrow \infty$

$$\left(\prod_{n=1}^m \lambda_{k,m,n} \right)^{\frac{1}{m}} \rightarrow \prod_{j=1}^k \frac{2j+1}{2j}.$$

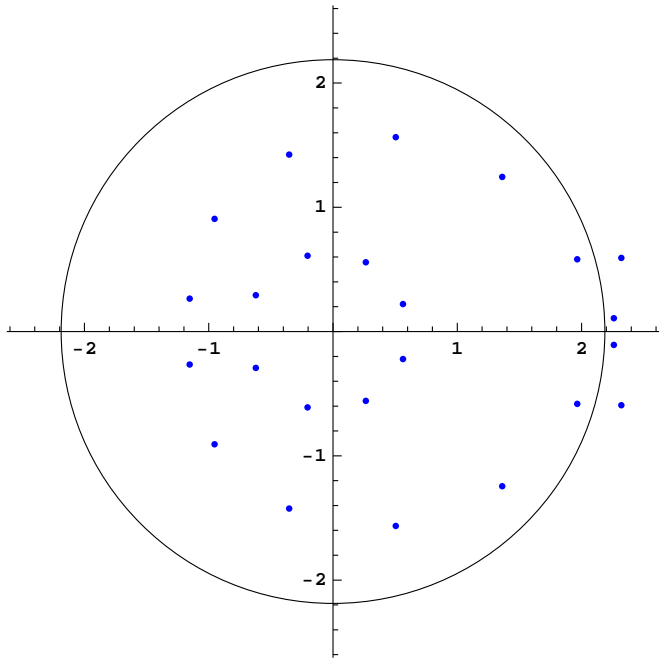


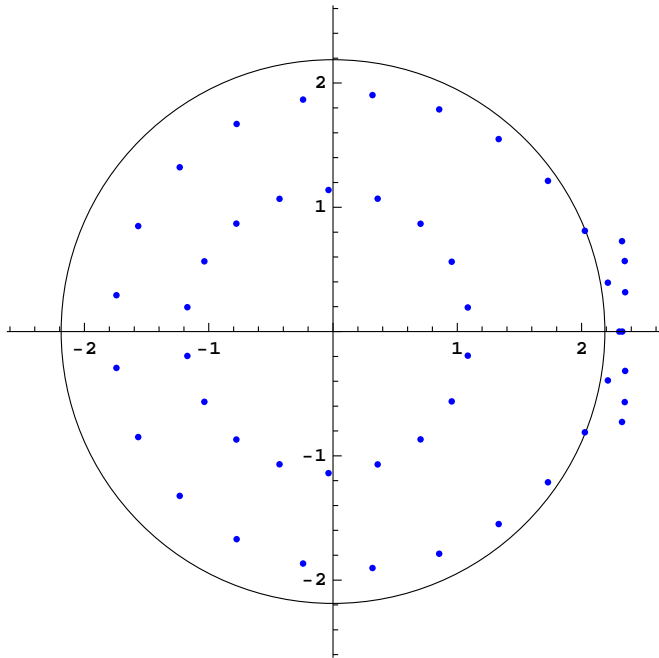


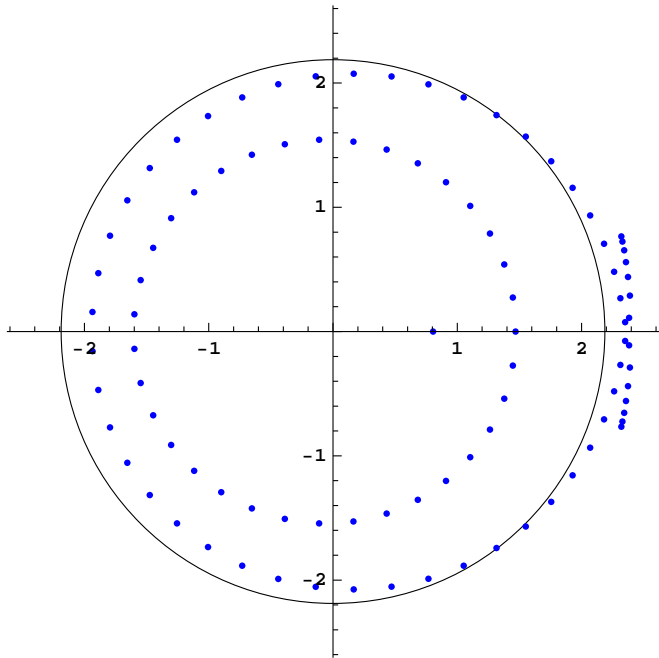


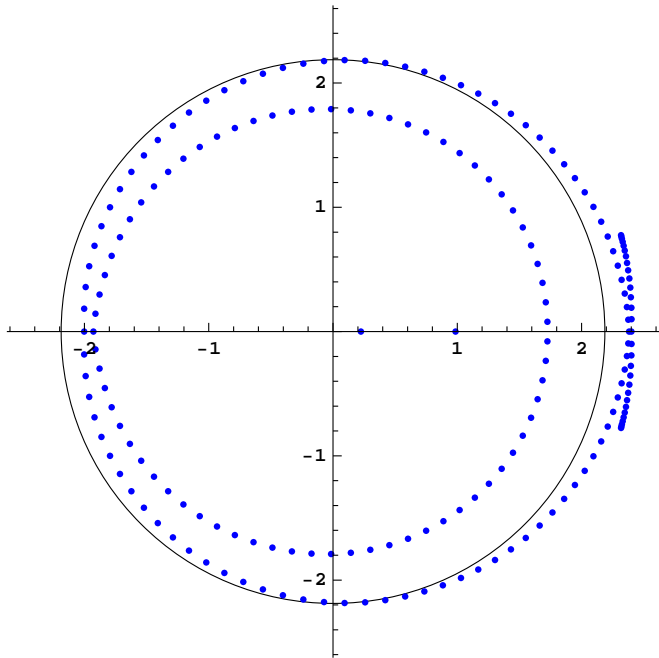


См. Анимация 2 (файл zetalambda2.pdf)

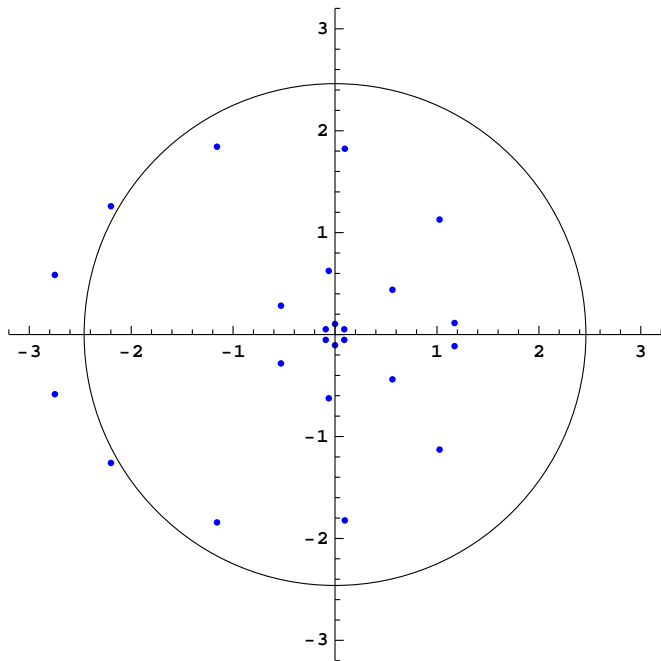


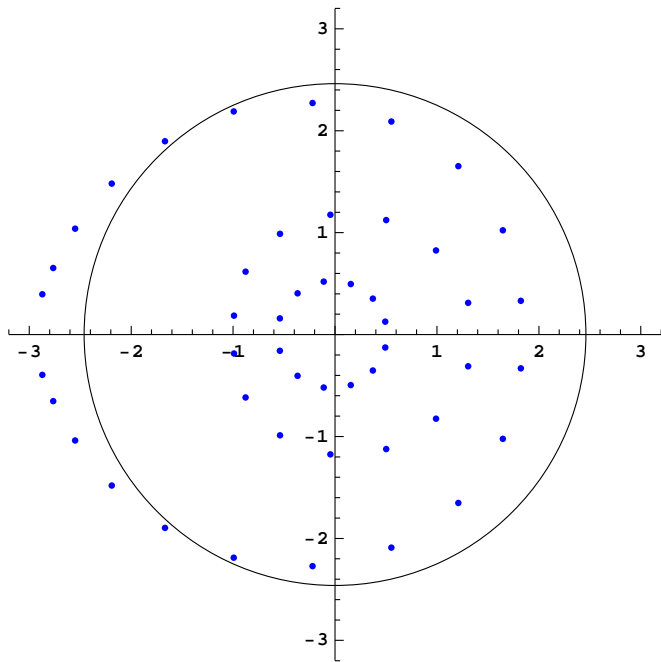


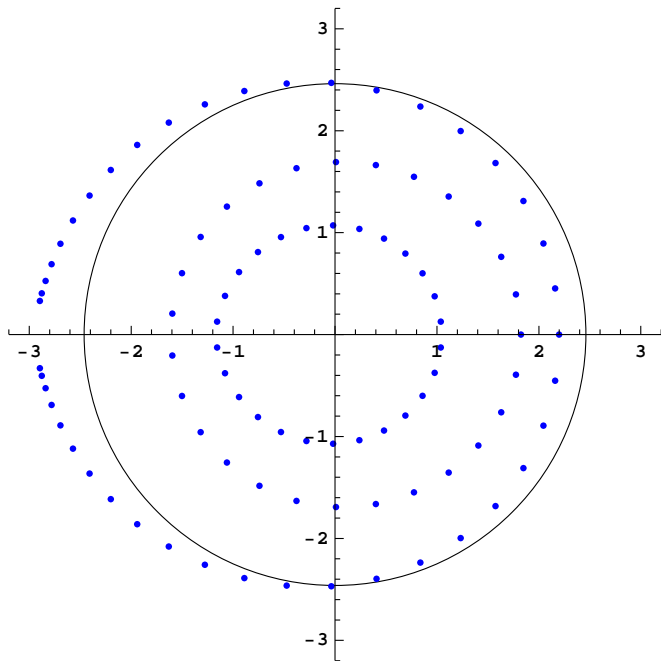


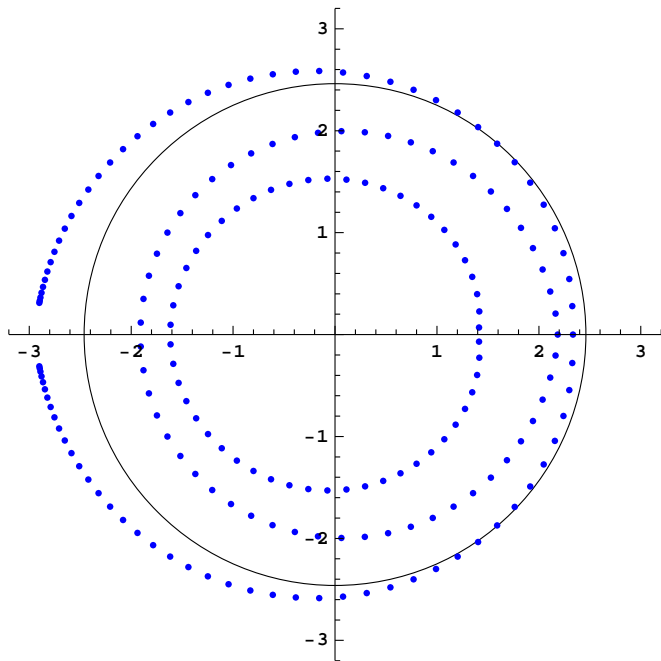


См. Анимация 3 (файл zetalambda3.pdf)

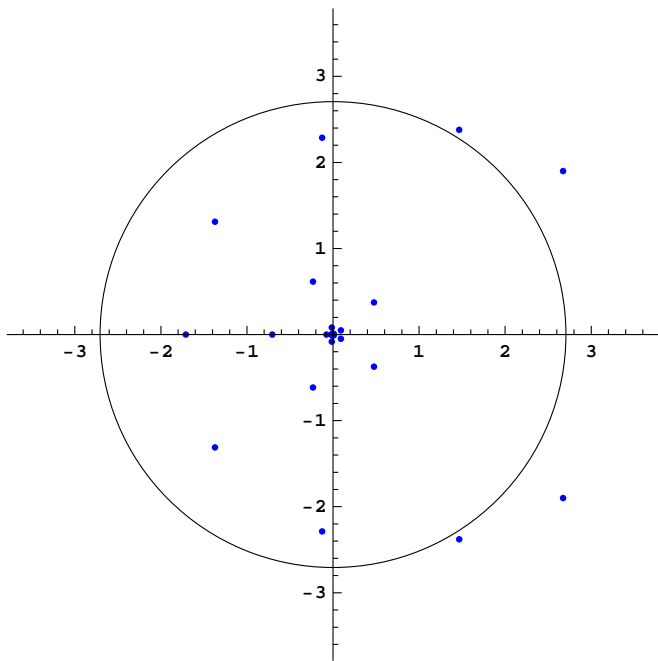


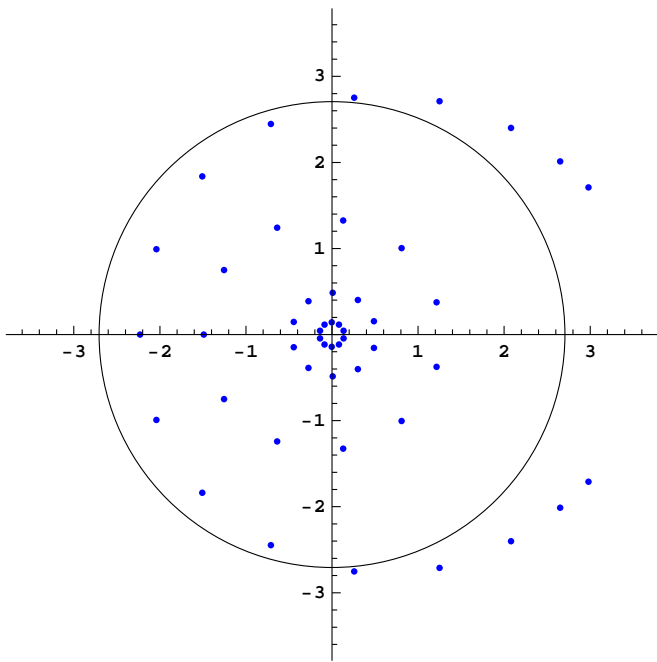


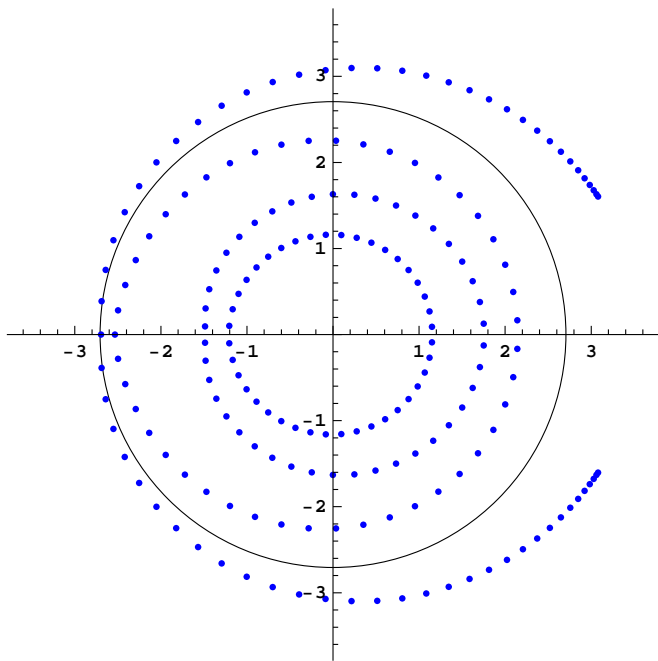




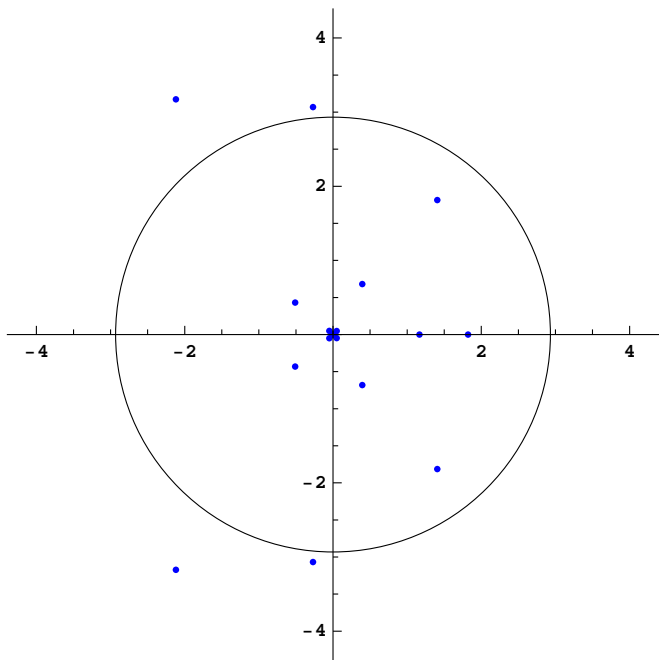
См. Анимация 4 (файл zetalambda4.pdf)

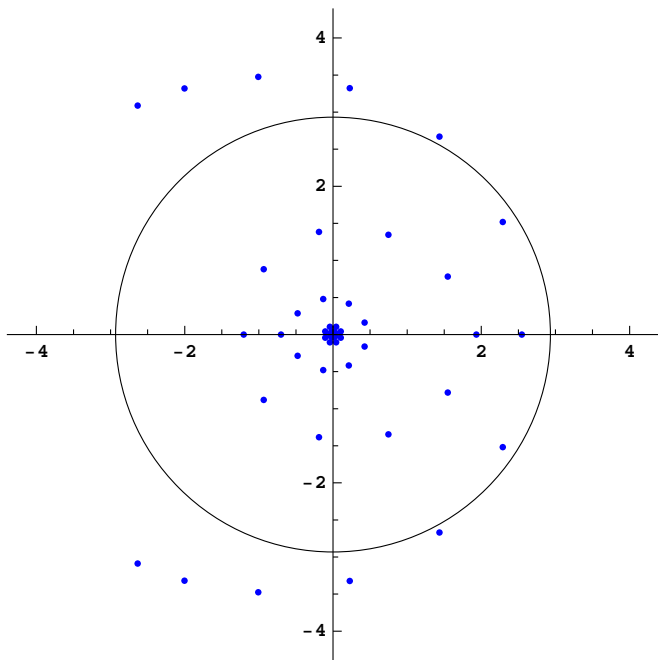


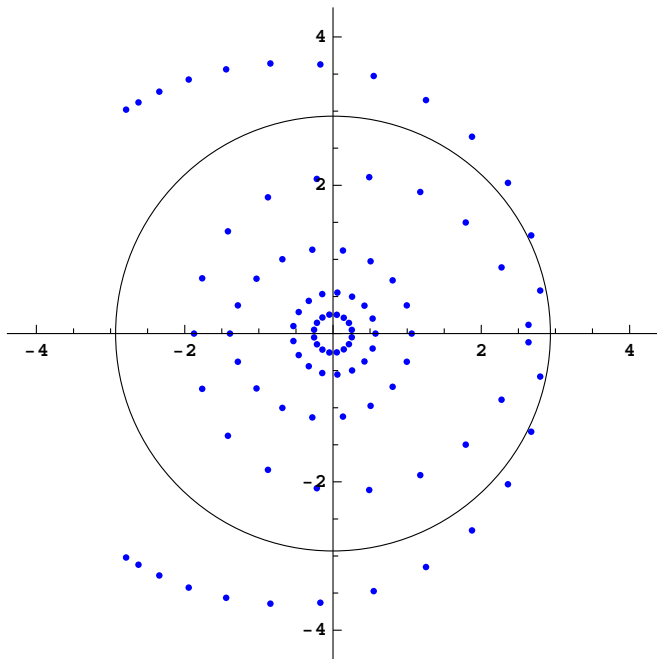


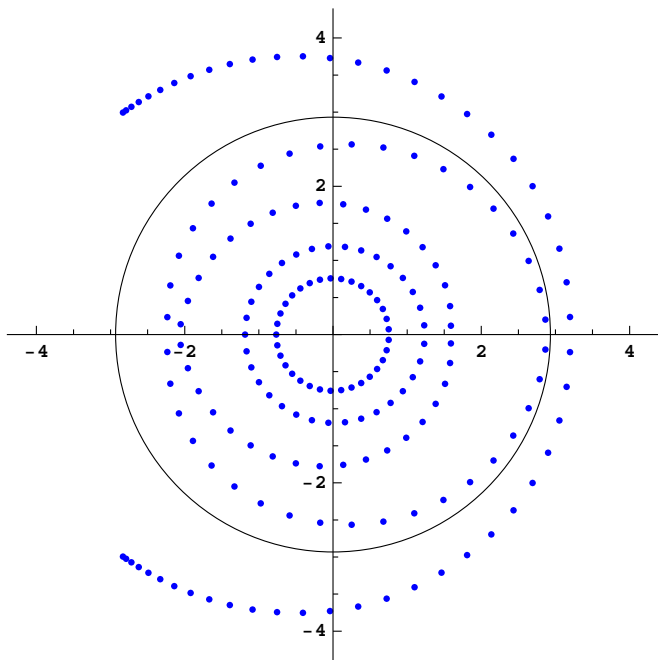


См. Анимация 5 (файл zetalambda5.pdf)









См. Анимация 6 (файл zetalambda6.pdf)

Новые матрицы

$$L_{k,m} = \begin{pmatrix} \theta_k & \theta_{k-1} & \cdots & \theta_{k-m+1} \\ \theta_{k+1} & \theta_k & \cdots & \theta_{k-m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{k+m-1} & \theta_{k+m-2} & \cdots & \theta_k \end{pmatrix}$$

$$M_{k,m} = -(-1)^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}} \begin{pmatrix} \theta_{k+m-1} & \theta_{k+m-2} & \cdots & \theta_k \\ \theta_{k+m-2} & \theta_{k+m-3} & \cdots & \theta_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_k & \theta_{k-1} & \cdots & \theta_{k-m+1} \end{pmatrix}$$

$$\det(L_{k,m}) = \det(M_{k,m})$$

$\mu_{k,m,1}, \mu_{k,m,2}, \dots, \mu_{k,m,m}$ – собственные числа матрицы $M_{k,m}$

См. Анимация 7 (файл zetamu1.pdf)

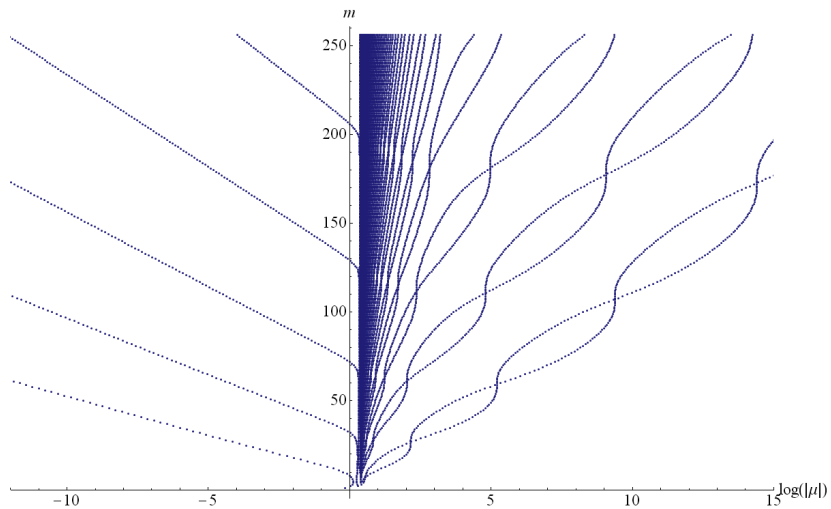


Figure: $k = 1$, $m = 1, \dots, 256$.

См. Анимация 8 (файл zetamu2.pdf)

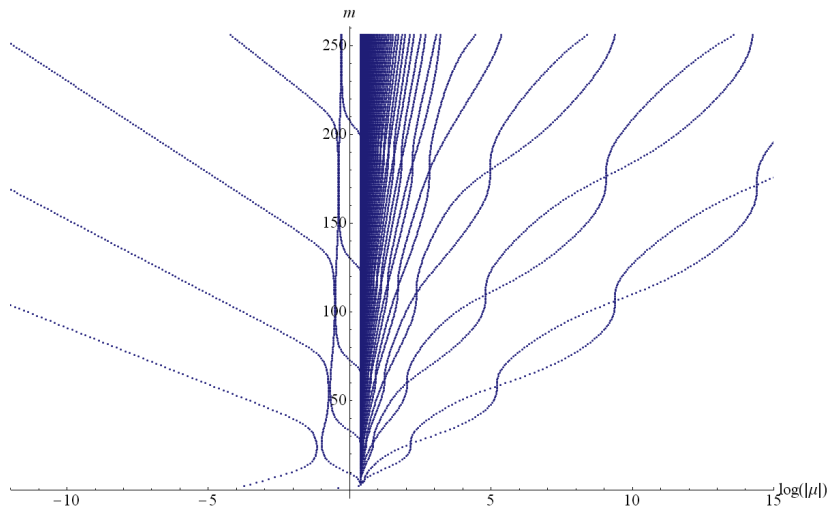


Figure: $k = 2$, $m = 1, \dots, 256$.

См. Анимация 9 (файл zetamu3.pdf)

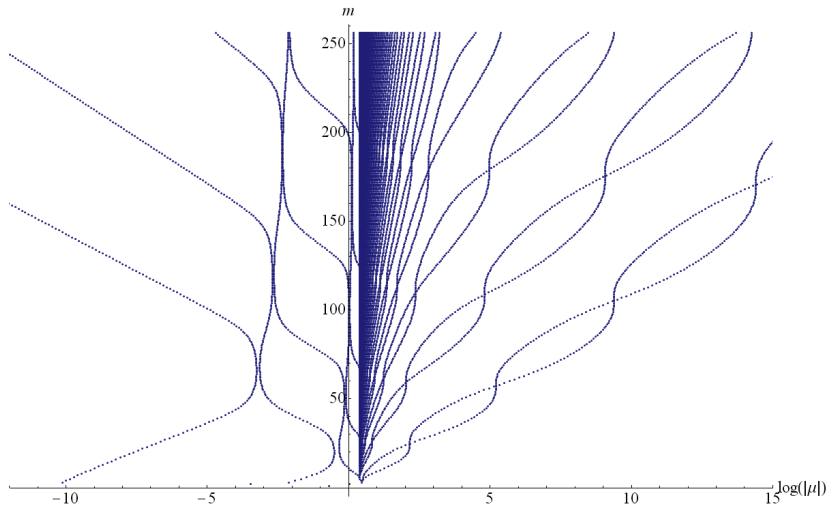


Figure: $k = 3$, $m = 1, \dots, 256$.

См. Анимация 10 (файл zetamu4.pdf)

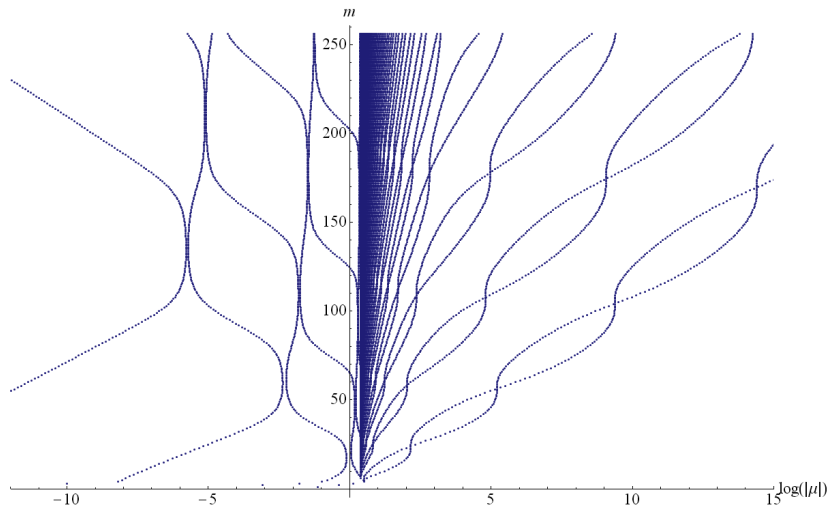


Figure: $k = 4$, $m = 1, \dots, 256$.

См. Анимация 11 (файл zetamu5.pdf)

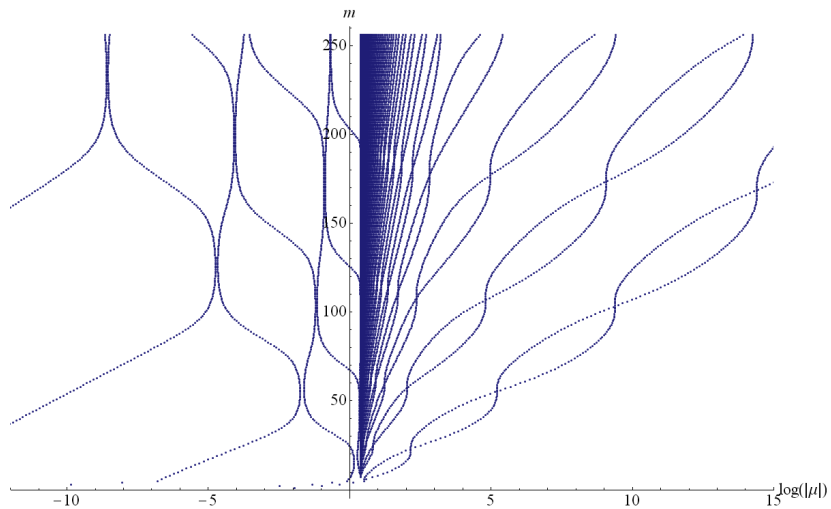


Figure: $k = 5$, $m = 1, \dots, 256$.

См. Анимация 12 (файл zetamu6.pdf)

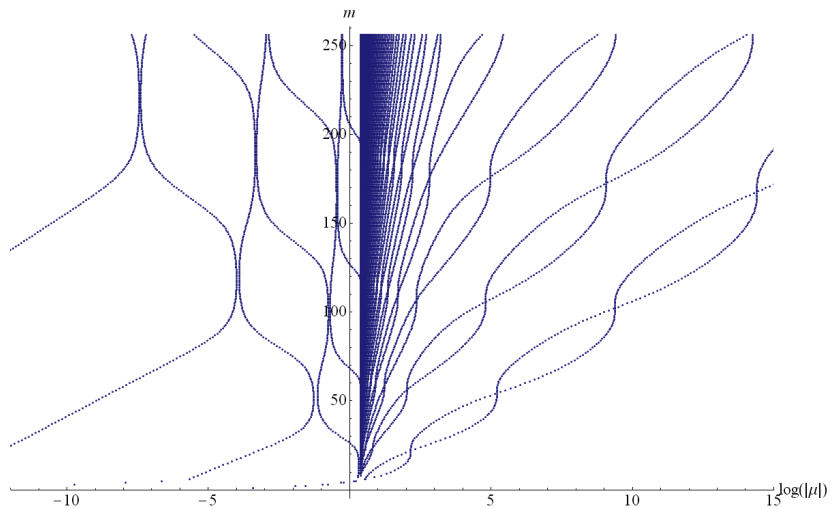


Figure: $k = 6$, $m = 1, \dots, 256$.

Распределения

Поместим в каждую точку $\ln(|\mu_{k,m,n}|)$ вес $\frac{1}{m}$, и обозначим через $F_{k,m}(x)$ соответствующую функцию распределения.

Подгипотеза RH_k^w (версия 4). При $m \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{k,m}(x) \rightarrow \ln \left(\prod_{j=1}^k \frac{2j+1}{2j} \right).$$

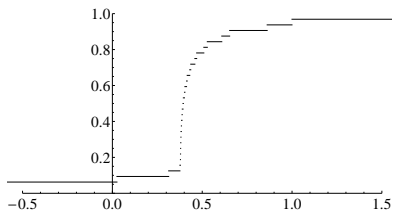


Figure: $k = 1$, $m = 32$

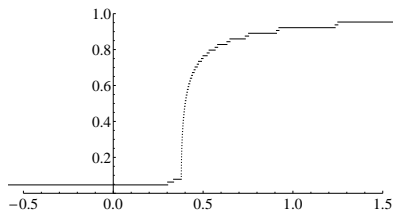


Figure: $k = 1$, $m = 64$

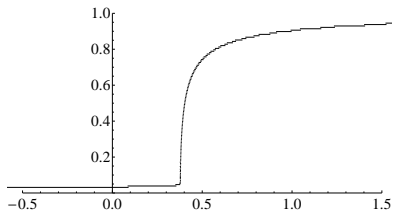


Figure: $k = 1$, $m = 128$

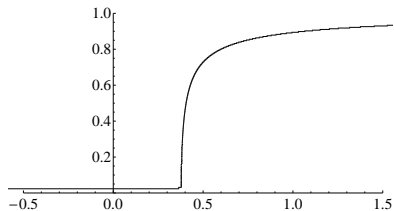


Figure: $k = 1$, $m = 256$

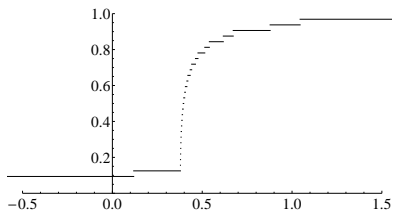


Figure: $k = 2$, $m = 32$

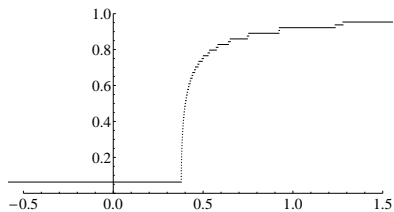


Figure: $k = 2$, $m = 64$

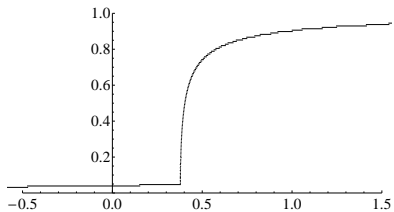


Figure: $k = 2$, $m = 128$

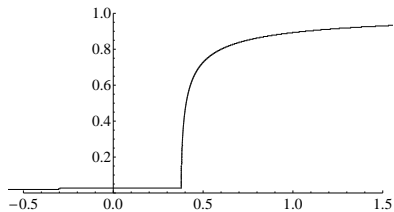


Figure: $k = 2$, $m = 256$

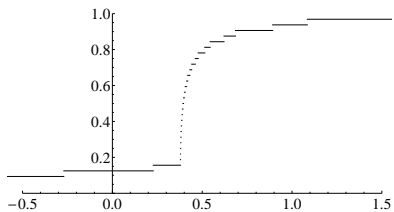


Figure: $k = 3$, $m = 32$

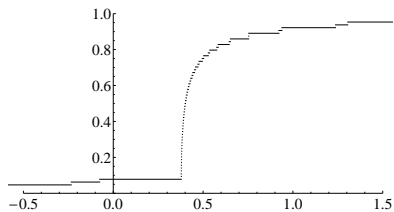


Figure: $k = 3$, $m = 64$

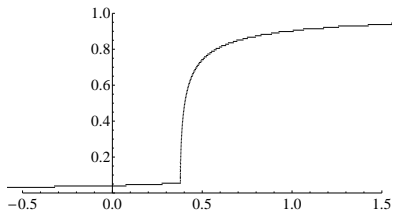


Figure: $k = 3$, $m = 128$

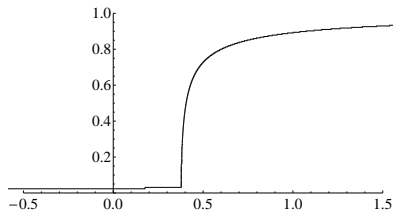


Figure: $k = 3$, $m = 256$

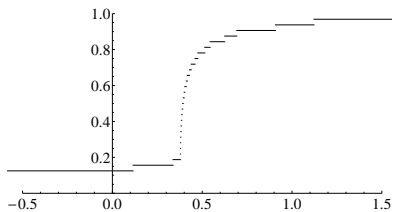


Figure: $k = 4$, $m = 32$

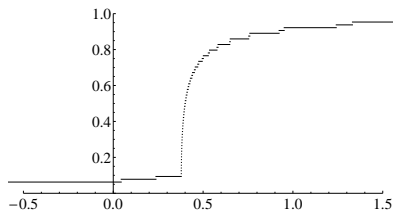


Figure: $k = 4$, $m = 64$

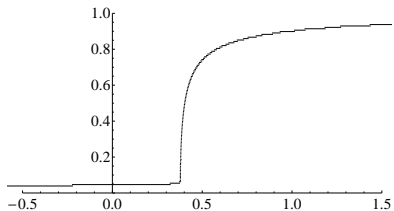


Figure: $k = 4$, $m = 128$

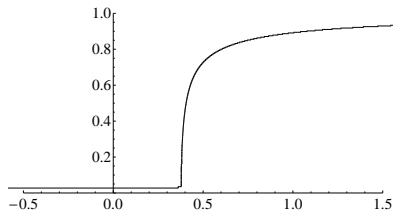


Figure: $k = 4$, $m = 256$

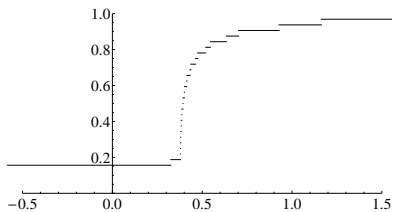


Figure: $k = 5$, $m = 32$

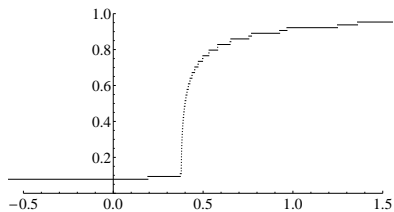


Figure: $k = 5$, $m = 64$

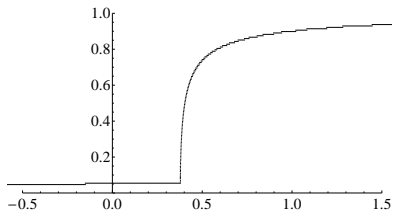


Figure: $k = 5$, $m = 128$

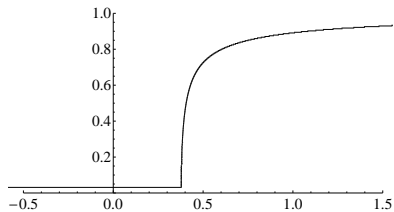


Figure: $k = 5$, $m = 256$

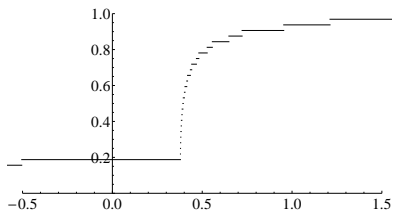


Figure: $k = 6$, $m = 32$

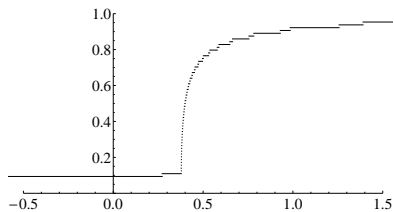


Figure: $k = 6$, $m = 64$

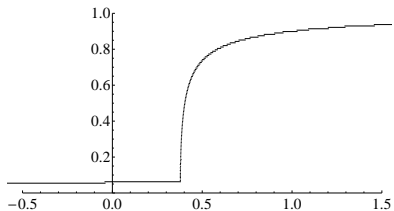


Figure: $k = 6$, $m = 128$

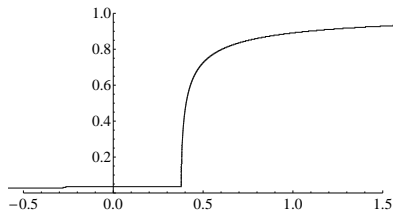


Figure: $k = 6$, $m = 256$