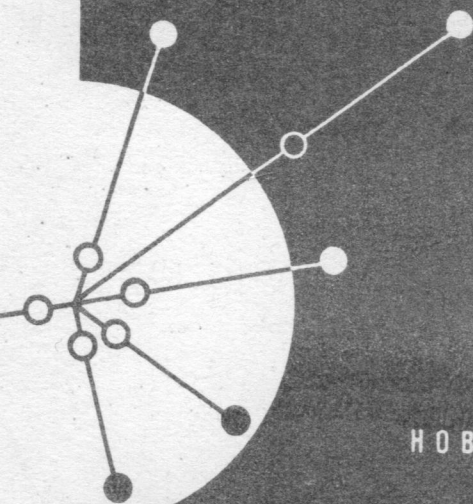


2

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ



26

НОВОСИБИРСК 1974

УДК 519.1

ОДИН КРИТЕРИЙ РАСКРАШИВАЕМОСТИ ВЕРШИН ГРАФА,
ФОРМУЛИРУЕМЫЙ В ТЕРМИНАХ ОРИЕНТАЦИЙ РЕБЕР

Д.В.Матиясевич

И. Л.М.Витавер [1] и Дж.Минти [2] предложили критерий раскрашиваемости вершин графа не более чем в заданное число цветов k , которые формулируются в терминах ориентаций ребер (оба результата приведены также в монографии [3], из которой мы заимствуем терминологию и обозначения). Ниже приведен еще один критерий такого типа. Чтобы сформулировать его, введем несколько новых понятий.

Рассмотрим всевозможные ориентированные графы, получающиеся из обыкновенного графа $L = (X, U)$ заданием ориентации каждого из ребер. Для каждого такого графа $\bar{L}$ на множестве вершин X определена функция $s_{\bar{L}}^+(x)$ — число дуг, выходящих из вершины x . Про два таких графа $\bar{L}'$ и $\bar{L}''$ будем говорить, что они сравнимы по модулю k , если для любой вершины x

$$s_{\bar{L}'}^+(x) \equiv s_{\bar{L}''}^+(x) \pmod{k}.$$

Ясно, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно и, таким образом, разбивает все ориентации графа L на классы вычетов по модулю k .

Введем еще одно отношение эквивалентности, а именно: будем говорить, что $\bar{L}'$ и $\bar{L}''$ согласованы, если один из этих графов можно получить из другого путем переориентации четного числа ребер. Отношение согласованности разбивает каждый класс вычетов на два подкласса, которые мы будем называть смежными.

Предлагаемый критерий ниже сформулирован отдельно в виде достаточного и необходимого условий. При этом необходимое условие является формально более сильным, чем достаточное, так что любое промежуточное условие может служить самостоятельным критерием.

Для того чтобы обыкновенный граф допускал раскраску всех вершин не более чем в k цветов,

ДОСТАТОЧНО, чтобы у этого графа какие-либо два смежных подкласса вычетов по модулю k содержали неравное число ориентаций,

НЕОБХОДИМО, чтобы для любого натурального числа ℓ , отличного от 1 и взаимно-простого с k , у этого графа имелись два смежных подкласса вычетов по модулю k , мощности которых различались бы уже по модулю ℓ .

Интересный промежуточный критерий для нечетных k получается при $\ell = 2$ (этот критерий формулируется без понятия смежных подклассов):

Для того чтобы обыкновенный граф допускал раскраску всех вершин не более чем в k цветов, где k нечетно, необходимо и достаточно, чтобы у этого графа хотя бы один из классов вычетов по модулю k содержал нечетное число ориентаций.

Требование взаимной простоты ℓ и k существенно: граф, являющийся простым циклом четной длины, раскрашиваем в 2 цвета, хотя у него каждый непустой класс вычетов по модулю 2 содержит по 2 ориентации.

Отметим следующую важную черту предлагаемого критерия, отличающую его от критериев Витавера и Минти. В этих критериях существование раскраски связывается с существованием другого объекта, а именно ориентации того или иного специального вида. При этом раскраска и ориентация оказываются связаны достаточно тесно, так что граф имеет мало или много раскрасок в соответствии с тем, имеет ли он мало или много ориентаций требуемого вида. В нашем критерии существование раскраски также связывается с существованием другого объекта — пары смежных подклассов вычетов, содержащих неравное число ориентаций, однако нет прямой связи таких пар с раскрасками. Пустой граф с n вершинами, имеющий k^n , то есть максимально возможное число раскрасок в k цветов, имеет лишь одну ориентацию, и, следовательно, у него удовлетворяет критерию лишь одна пара смежных подклассов среди

потенциальных (у графов с n вершинами) k^n пар. С другой стороны, можно показать, что если некоторый граф с n вершинами имеет лишь одну (с точностью до переименования) раскраску в k цветов, то не менее чем k^{n-k} пар смежных подклассов удовлетворяют условию достаточности в нашем критерии. Таким образом, этот критерий более эффективен как раз на графах, имеющих малое число раскрасок, то есть в тех случаях, которые обычно представляют наибольший интерес и доставляют наибольшие трудности.

Укажем, что предлагаемый критерий будет справедлив и для графов с петлями, если считать, что каждая петля может быть ориентирована двумя способами; он также справедлив для графов с кратными ребрами. Доказательство для общего случая отличается от приводимого ниже лишь некоторым усложнением обозначений.

2. Введем понятия и обозначения, необходимые для доказательства справедливости критерия.

Установим взаимно-однозначное соответствие между вершинами графа $\mathcal{L}$ и формальными переменными $x_1, \dots, x_n$ (ниже мы будем просто отождествлять вершины с этими переменными). Зафиксируем какую-либо ориентацию $\vec{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \vec{U}^*)$ всех ребер и обозначим через $M_{\vec{\mathcal{L}}}(x_1, \dots, x_n)$ характеристический полином графа $\mathcal{L}$, равный по определению

$$\prod_{x_i x_j \in \vec{U}^*} (x_i - x_j) \quad (1)$$

(в нашем обозначении не нашел отражения выбор ориентации, однако легко видеть, что полиномы, получающиеся при разном выборе ориентаций, различаются разве лишь знаком, а это различие для дальнейшего несущественно). Если рассматривать цвета как элементы некоторого кольца без делителей нуля и считать значением переменной x цвет вершины x , то неравенство

$$M_{\vec{\mathcal{L}}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \quad (2)$$

выделяет раскраски среди всевозможных способов присвоения переменным в качестве значений элементов рассматриваемого кольца.

Предположим на некоторое время, что $q = k + 1$ — простое число. Будем считать цветами ненулевые элементы конечного поля $GF(q)$ с q элементами (то есть поля вычетов по модулю q), но будем разрешать принимать переменным любые значения из этого поля. Роль неравенства (2) теперь будет играть неравенство

$$x_1, \dots, x_n M(x_1, \dots, x_n) \neq 0. \quad (3)$$

Таким образом, граф $\mathcal{L}$ не имеет раскраски не более чем в k цветов тогда и только тогда, когда полином

$$x_1, \dots, x_n M(x_1, \dots, x_n) \quad (4)$$

является тождественно нулевым в поле $GF(q)$.

В конечном поле полином может быть тождественно нулевым, не являясь формально нулевым, то есть таким, у которого все коэффициенты равны, как элементы поля, нулю. Примером может служить полином $x^q - x$, поскольку, по следствию малой теоремы Ферма, для любого x

$$x^q \equiv x \pmod{q}. \quad (5)$$

Однако полином, имеющий по каждой переменной степень не более $q-1$, равен тождественно нулю, только будучи формально нулевым полиномом (для полиномов от одной переменной это следует из того факта, что у формально ненулевого полинома число корней не больше его степени; на полиномы от многих переменных это легко обобщается индукцией по числу переменных). Ниже для обозначения формального (покоэффициентного) равенства двух полиномов мы будем использовать символ $\equiv$.

Пусть i и j — натуральные числа и $i < j$. Будем называть максимальной редукцией по схеме $x^i \rightarrow x^j$ полинома

$$A(x_1, \dots, x_n) \equiv \sum_{j_1, \dots, j_n} a_{j_1, \dots, j_n} x_1^{j_1}, \dots, x_n^{j_n}$$

полином

$$\sum_{j_1, \dots, j_n} a_{j_1, \dots, j_n} x_1^{i_{j_1}}, \dots, x_n^{i_{j_n}},$$

где i_m есть наименьшее целое, которое не меньше i и сравнимо с j_m по модулю $j-i$, и будем обозначать последний полином посредством $R_i^j[A(x_1, \dots, x_n)]$. Согласно (5) в поле $GF(q)$ для любого полинома $A(x_1, \dots, x_n)$ имеет место тождество

$$R_i^q[A(x_1, \dots, x_n)] = A(x_1, \dots, x_n).$$

С другой стороны, максимальная редукция по схеме $x^q \rightarrow x$ имеет по каждой переменной степень не более $q-1$, и, таким образом, полином (4) является тождественно нулевым в поле $GF(q)$ тогда и только тогда, когда полином

$$R_i^q[x_1, \dots, x_n M(x_1, \dots, x_n)]$$

является формально нулевым в поле $\mathcal{GF}(q)$. Легко видеть, что

$$R_0^q [x_1, \dots, x_n M_b(x_1, \dots, x_n)] = x_1, \dots, x_n R_0^{q-1} [M_b(x_1, \dots, x_n)].$$

Домножение на $x_1 \dots x_n$ переводит формально нулевой (ненулевой) полином в формально нулевой (соответственно, ненулевой) полином. Таким образом, полином (4) является тождественно нулевым в поле $\mathcal{GF}(q)$ тогда и только тогда, когда полином

$$R_0^{q-1} [M_b(x_1, \dots, x_n)] \quad (6)$$

является формально нулевым в поле $\mathcal{GF}(q)$.

Ослабим предположение о том, что $q = k+1$ и q - простое число. Будем считать теперь, что q - любое натуральное число, удовлетворяющее двум условиям: $q \equiv 1 \pmod{k}$; существует конечное поле $\mathcal{GF}(q)$ с q элементами (то есть q является степенью простого числа). Мы по-прежнему будем разрешать переменным принимать любые значения из поля $\mathcal{GF}(q)$, но будем считать цветами только ненулевые элементы поля $\mathcal{GF}(q)$, представимые в виде x^m , где m определяется равенством $q = mk + 1$. Покажем, что при этом у нас действительно будет ровно k цветов.

Пусть оказалось, что имеется k' цветов $a_1, \dots, a_{k'}$. Тогда каждый из mk ненулевых элементов поля $\mathcal{GF}(q)$ является корнем одного из k' уравнений

$$x^m = a_1, \dots, x^m = a_{k'}.$$

Но каждое уравнение имеет не более чем m корней, следовательно, $k' \geq k$. С другой стороны, в поле $\mathcal{GF}(q)$ справедливо тождество

$$x^q = x,$$

являющееся аналогом (5). Отсюда следует, что $a_1, \dots, a_{k'}$ - это корни уравнения

$$x^k = 1,$$

и, таким образом, $k' \leq k$. Равенство $k' = k$ доказано.

Будем считать, что вершина x окрашена в цвет x^m . Тогда роль неравенства (3) будет играть неравенство

$$x_1, \dots, x_n M_b(x_1^m, \dots, x_n^m) \neq 0.$$

а роль полинома (6) - полином

$$R_0^{q-1} [M_b(x_1^m, \dots, x_n^m)].$$

Легко проверить, что

$$R_0^{q-1} [M'_\ell(x_1^m, \dots, x_n^m)] \equiv R_0^{k,m} [M'_\ell(x_1^m, \dots, x_n^m)] \equiv \\ \equiv M'_\ell(x_1^m, \dots, x_n^m),$$

где

$$M'_\ell(x_1, \dots, x_n) \equiv R_0^k [M_\ell(x_1, \dots, x_n)].$$

Так как подстановка $x_1^m, \dots, x_n^m$ вместо $x_1, \dots, x_n$ переводит формально нулевой (ненулевой) полином в формально нулевой (соответственно, ненулевой) полином, то окончательно получаем, что граф ℓ не имеет раскраски не более чем в k цветов тогда и только тогда, когда полином

$$R_0^k [M'_\ell(x_1, \dots, x_n)] \quad (7)$$

является формально нулевым в поле $GF(q)$.

3. Установим теперь связь между коэффициентами полинома (7) и смежными подклассами вычетов по модулю k . Пользуясь законом дистрибутивности, можно записать произведение (I) в виде алгебраической суммы 2^n одночленов, где n - число ребер графа ℓ . Имеется естественное взаимно-однозначное соответствие между этими одночленами и ориентациями графа ℓ : ориентации $\vec{\ell} = (\vec{X}, \vec{U})$ соответствует одночлен, который получается в результате выбора в сомножителе $x_i - x_j$ ($x_i, x_j \in \vec{U}^*$) первого или второго слагаемого в зависимости от того, $\overline{x_i x_j} \in \vec{U}$ или же $\overline{x_j x_i} \in \vec{U}$, т.е. одночлен $\varepsilon x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}$, где $s_i = s_{\vec{\ell}}^+(x_i)$, а $\varepsilon = 1$ или же $\varepsilon = -1$ в зависимости от того, согласованы ориентации $\vec{\ell}$ и $\vec{\ell}^*$ или же нет.

Указанное соответствие позволяет переформулировать данные ранее определения в новых терминах: две ориентации сравнимы по модулю k тогда и только тогда, когда соответствующие им одночлены переходят при максимальной редукции по схеме $x^k \rightarrow 1$ в однородные одночлены; две ориентации согласованы тогда и только тогда, когда соответствующие им одночлены имеют одинаковые знаки. Таким образом, набор коэффициентов полинома (7) является, с точностью до знаков, набором разностей между мощностями смежных подклассов вычетов по модулю k .

4. Завершим доказательство справедливости предлагаемого критерия. Пусть $\ell = (X, U)$ - обыкновенный граф, у которого есть два смежных подкласса вычетов по модулю k , содержащих неравное число ориентаций. Как показано выше, это соответствует тому, что

полином (7) имеет какой-то ненулевой коэффициент. Обозначим через p какое-либо простое число, не делящее ни этот ненулевой коэффициент, ни число k . По принципу Дирихле среди $k+1$ числа $1, p, \dots, p^k$ есть два неравных, но сравнимых по модулю k , и, следовательно, $p^t \equiv 1 \pmod{k}$ для некоторого положительного t (хорошо известно, что в качестве такого t можно было бы взять $\varphi(k)$, где φ - функция Эйлера, но нам важен лишь факт существования t). Положим $q = p^t$, тогда полином (7) не будет формально нулевым в поле $GF(q)$, поскольку его коэффициенты принадлежат основному подполю, и p не делит один из коэффициентов. Как показано выше, отсюда следует, что граф $\mathcal{L}$ допускает раскраску вершин не более чем в k цветов. Достаточность установлена.

Пусть теперь $\mathcal{L} = (X, U)$ - обыкновенный граф, имеющий раскраску вершин не более чем в k цветов, ℓ - натуральное число, отличное от 1 и взаимно-простое с k . Обозначим через p какой-либо простой делитель числа ℓ . Выберем число q так же, как при доказательстве достаточности. Тогда в полиноме (7) хотя бы один одночлен имеет коэффициент, отличный от нуля в поле $GF(q)$, то есть не кратный p и, значит, не кратный ℓ . Тот класс вычетов по модулю k , который соответствует этому одночлену, и разбивается на два смежных подкласса, мощности которых различаются по модулю ℓ . Необходимость доказана.

Л и т е р а т у р а

1. ВИТАВЕР Л.М. Нахождение минимальных раскрасок вершин графа с помощью булевых степеней матрицы смежности. - "Докл. АН СССР", 1962, 147, № 4, с. 758-759.

2. MINTY G.I. A theorem on n -coloring the points of a linear graph. - "Amer. Math. Mon.", 1962, 69, N 7, p. 623-624.

3. ЗЫКОВ А.А. Теория конечных графов I. Новосибирск, "Наука", 1969.

Поступила в ред.-изд.отдел
18.6.1974 г.