Ю. В. Матиясевич

Поиск полиномиальных зависимостей между значениями знакопеременной дзета-функции и её производных

https://logic.pdmi.ras.ru/seminars/dm-seminar

Information for speakers

Our expectations. We like understandable talks. In any case we prefer to hear and understand a small amount of information than to hear a large number of incomprehensible information. We feel good about the fact that we are reminded of all the definitions. We do not treat the talk as a formality.

We prefer to learn about proofs. It is much more important for us to understand the ideas of the proof than to understand the technical details.

We do not like very fast presentations. It is important that the audience would have the opportunity to ask questions before the topic changes cardinally.

Ю. В. Матиясевич

Поиск полиномиальных зависимостей между значениями знакопеременной дзета-функции и её производных

First guess, then prove.
George Pólya

PDMI Preprint 01/2024

Searching approximate polynomial dependencies among the derivatives of the alternating zeta function

Yu. V. Matiyasevich

St. Petersburg Department
of V. A. Steklov Institute of Mathematics
of Russian Academy of Sciences

yumat@pdmi.ras.ru

Yuri Matiyasevich

In search of approximate polynomial dependencies among the derivatives of the alternating zeta function

Submitted to

“JOURNAL of EXPERIMENTAL MATHEMATICS”

$\neq$

journal “EXPERIMENTAL MATHEMATICS”

Второй препринт

(PDF) In search of approximate

researchgate.net/publication/380486954_In_search_of_approximate_polynomial_dependencies_among_the_derivatives_of_the_alternating_zeta_func...

ResearchGate Home Questions Jobs

Preprint File available

In search of approximate polynomial dependencies among the derivatives of the alternating zeta function

May 2024
DOI: 10.13140/RG.2.2.30721.67686

Yuri Matiyasevich

Preprints and early-stage research may not have been peer reviewed yet.

Дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + \dots + k^{-s} + \dots$$

Этот *ряд Дирихле* сходится в полуплоскости $\mathrm{Re}(s) > 1$, но определяемая им функция может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость за исключением точки $s = 1$, которая является единственным (и простым) полюсом меромофной функции $\zeta(s)$.

Гармонический ряд

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

расходится

Другое определение дзета-функции

Теорема (Тождество Эйлера [1737]).

$$\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + \dots + k^{-s} + \dots = \prod_{p\text{ — простое}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Доказательство.

$$\prod_{p\text{ — простое}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{p\text{ — простое}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots\right) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots = \zeta(s)$$

Бесконечность множества простых чисел

Тождество Эйлера:

$$1^{-s} + 2^{-s} + \dots + k^{-s} + \dots \quad = \prod_{p \text{ – простое}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Теорема (Евклид). Существует бесконечно много простых чисел.

Доказательство (Эйлер). Если бы количество простых чисел было конечным, то гармонический ряд имел бы конечную сумму:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad = \prod_{p \text{ – простое}} \frac{1}{1 - p^{-1}}$$

Сколь много простых чисел?

$\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих x

C. Gauss: $\pi(x) \approx \mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(t)} \mathrm{d}t$

Теорема (Riemann [1859]).

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}}) + \sum_{\substack{\zeta(\rho)=0 \\ \mathrm{Re}(\rho)\neq 0}} \mathrm{Li}(x^{\rho}) + (\text{малые слагаемые})$$

Вечная проблема

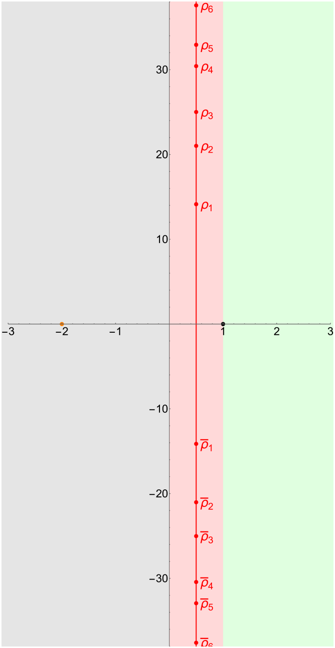
Гипотеза Римана (1859)
Проблема Гильберта (1900)
Проблема тысячелетия (XXI век)

Все невещественные (называемые *нетривиальными) нули функции* $\zeta(s)$ *лежат на* *критической прямой*

$$\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$$

Эквивалентная формулировка.

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{\frac{1}{2}} \ln^2(x))$$



Приложения гипотезы Римана

Теорема (Manindra Agrawal, Neeraj Kayal и Nitin Saxena [2002]. Существует детерминированный алгоритм, который распознаёт, является ли данное число p простым или нет, за полиномиальное время.

Первоначальное доказательство: за время $O\big(\ln^{12+\epsilon}(p)\big)$

Carl Pomerance и Hendrik W. Lenstra [2006]: за время $O\big(\ln^{6+\epsilon}(p)\big)$

Теорема (Gary L. Miller [1976]. Существует детерминированный алгоритм, который распознаёт, является ли данное число p простым или нет, за время

$$O\big(\ln^{4+\epsilon}(p)\big),$$

если верна (расширенная) гипотеза Римана.

Гипотеза Римана и физика

Joint online seminar of Saint Petersburg State University and Peking University. Thursday, November, 14 at 3-5 PM Moscow

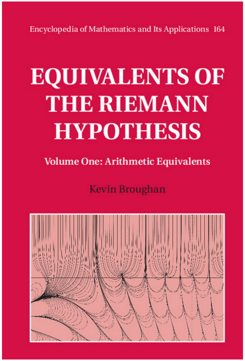
Lecture 2. Real-Valued Spacetime Dimensions, Black Hole Dualities, and the Riemann Zeta Function

Speaker: Irina Aref'eva (Steklov Mathematical Institute, Moscow)

Abstract: ... This talk will also address the emergence of negative dimensions, which appear when attempting to describe black hole thermodynamics using quantum statistical models. ... To assign mathematical meaning to geometrical objects in negative dimensions, we use analytical continuation and properties of the Riemann zeta function.

I. Aref'eva and I.Volovich, "Violation of the Third Law of Thermodynamics by Black Holes, Riemann Zeta Function and Bose Gas in Negative Dimensions", *Eur. Phys. J. Plus* 139, 300 (2024)

Переформулировки гипотезы Римана



KEVIN ALFRED BROUGHAN

Equivalents of the Riemann Hypothesis

Volume 1. Arithmetic Equivalents (325 pp, 2017)
Volume 2. Analytical Equivalents (491 pp, 2017)
Volume 3. Further steps towards resolving the Riemann hypothesis (684 pp, 2024)

Encyclopedia of Mathematics and its Applications
Cambridge University Press

Vol. 1, p. 241: “A subset $T \subset N$ is computable if there is an algorithm to determine in a finite number of steps whether or not an arbitrary given natural number is a member of T [44]. From the theory of algorithms it follows that RH is decidable, i.e. its truth or negation are able to be proved.”

Гипотеза Римана – это очень просто!

Теорема (A. Turing [1939])

$$\mathrm{RH} \in \Pi_2^0$$

$$\mathrm{RH} \Leftrightarrow \forall x_1 \dots x_m \exists y_1 \dots y_n \phi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$$

Теорема (G. Kreisel [1958])

$$\mathrm{RH} \in \Pi_1^0$$

$$\mathrm{RH} \Leftrightarrow \forall x_1 \dots x_m \psi(x_1, \dots, x_m)$$

Гипотеза Римана для школьников

Теорема (Матиясевич [2018]). *Гипотеза Римана верна если и только если следующая программа на языке* PYTHON 3 *не завершает работу:*

```
from math import gcd
d=m=p=0
f0=f1=f3=n=q=1
while p**2*(m-f0)<f3:
  d=2*n*d-(-1)**n*f1
  n=n+1
  g=gcd(n,q)
  q=n*q//g
  if g==1: p=p+1
  m=0; q2=q
  while q2>1:
    q2=q2//2; m=m+d
  f1=2*f0
  f0=2*n*f0
  f3=(2*n+3)*f3
```

https://scottaaronson.blog/?p=2741

« The 8000th Busy Beaver number eludes ZF set theory: new paper by Adam Yedidia and me

Three announcements

My Quora session »

(-3) **Bonus Announcement of May 30:** As a joint effort by Yuri Matiyasevich, Stefan O'Rear, and myself, and using the Not-Quite-Laconic language that Stefan adapted from Adam Yedidia's Laconic, we now have a 744-state TM that halts iff there's a counterexample to the Riemann Hypothesis.

Дзета-функция не проста

D. Hilbert [1900]
Например, рассмотрим класс тех функций, которые можно характеризовать дифференциальными уравнениями, обыкновенными или в частных производных. Как мы это сейчас увидим, в этот класс не входят функции, которые порождаются теорией чисел и исследование которых для нас чрезвычайно важно. Например, упомянутая уже функция $\zeta(s)$ не удовлетворяет никакому алгебраическому дифференциальному уравнению, как это легко усмотреть из известного соотношения между $\zeta(s)$ и $\zeta(1-s)$ пользуясь предложением, доказанным Гёльдером, о том, что функция $\Gamma(x)$ не удовлетворяет никакому алгебраическому дифференциальному уравнению.

V. E. E. Stadigh [1902]
Д. Д. Мордухай-Болтовской [1914]
А. М. Островский [1920]

Знакопеременная дзета-функция

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \\ \eta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-s}\end{aligned}$$

$$\eta(s) = (1 - 2 \times 2^{-s})\zeta(s)$$

Недостижимая амбициозная цель

Найти линейный многочлен

$$P(y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) = y_0 + c_1 y_1 + \dots + c_{N-1} y_{N-1} - b$$

с численными коэффициентами

$$b, c_1, \dots, c_{N-1}$$

такой что для всех комплексных a

$$P\big(\eta(a), \eta'(a), \dots, \eta^{\langle N-1 \rangle}(a)\big) = 0.$$

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-s}$$

Недостижимая амбициозная цель

$$P(y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}) = y_0 + c_1 y_1 + \cdots + c_{N-1} y_{N-1} - b$$

… такой что для всех комплексных a

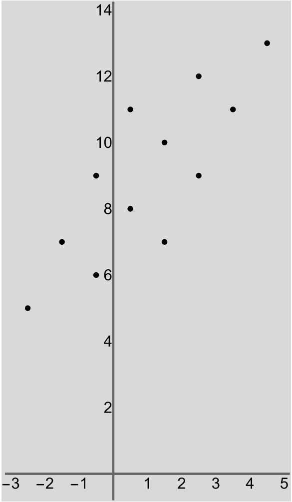
$$P\bigl(\eta(a), \eta'(a), \ldots, \eta^{\langle N-1\rangle}(a)\bigr) = 0.$$

$\mathfrak{A} = \{a_0, \ldots, a_{N-1}\}$ – комплексные числа в общем положении

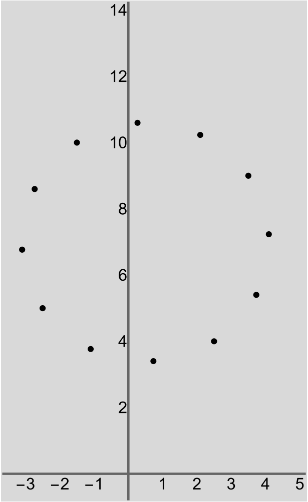
$$\begin{array}{rcl} \eta(a_0) + c_1\eta'(a_0) + \cdots + c_{N-1}\eta^{\langle N-1\rangle}(a_0) - b & = & 0 \\ \dotfill & & \\ \eta(a_{N-1}) + c_1\eta'(a_{N-1}) + \cdots + c_{N-1}\eta^{\langle N-1\rangle}(a_{N-1}) - b & = & 0 \end{array}$$

$b(\mathfrak{A}),\ c_1(\mathfrak{A}),\ \ldots,\ c_{N-1}(\mathfrak{A})$ – решение этой системы

Тестовые множества



$\mathfrak{A}_1$



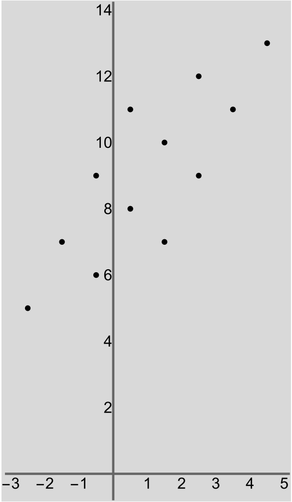
$\mathfrak{A}_2$

Решения системы

	$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_2$
$c_1(\mathfrak{A})$	$7.30910\ldots - 0.26348\ldots i$	$7.35147\ldots - 0.23197\ldots i$
$c_2(\mathfrak{A})$	$23.85173\ldots - 1.81924\ldots i$	$24.15410\ldots - 1.61238\ldots i$
$c_3(\mathfrak{A})$	$45.96860\ldots - 5.55318\ldots i$	$46.92441\ldots - 4.95964\ldots i$
$c_4(\mathfrak{A})$	$58.22426\ldots - 9.89546\ldots i$	$59.99059\ldots - 8.91557\ldots i$
$c_5(\mathfrak{A})$	$50.94334\ldots - 11.42336\ldots i$	$53.05986\ldots - 10.39502\ldots i$
$c_6(\mathfrak{A})$	$31.43810\ldots - 8.94113\ldots i$	$33.15830\ldots - 8.22831\ldots i$
$c_7(\mathfrak{A})$	$13.68711\ldots - 4.81140\ldots i$	$14.64820\ldots - 4.48445\ldots i$
$c_8(\mathfrak{A})$	$4.11913\ldots - 1.75935\ldots i$	$4.48375\ldots - 1.66349\ldots i$
$c_9(\mathfrak{A})$	$0.81560\ldots - 0.41866\ldots i$	$0.90549\ldots - 0.40230\ldots i$
$c_{10}(\mathfrak{A})$	$0.09551\ldots - 0.05857\ldots i$	$0.10851\ldots - 0.05731\ldots i$
$c_{11}(\mathfrak{A})$	$0.00500\ldots - 0.00365\ldots i$	$0.00583\ldots - 0.00365\ldots i$

$$b(\mathfrak{A}_1) = 0.99999999999999430995... + 0.00000000000000951329...i,$$
$$b(\mathfrak{A}_2) = 1.00000000000000637109... + 0.00000000000003070321...i.$$

Решётки



$\mathfrak{A}_1$

$$\mathfrak{A}_{\mathrm{G}}(a, \delta_1, \delta_2, N_1, N_2) = \\ = \{a + k\delta_1 + \ell\delta_2 \mid k = 0, \dots, N_1, \ell = 0, \dots, N_2\}$$

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_{\mathrm{G}}(-2.5 + 5\mathrm{i}, 2 + \mathrm{i}, 1 + 2\mathrm{i}, 2, 3)$$

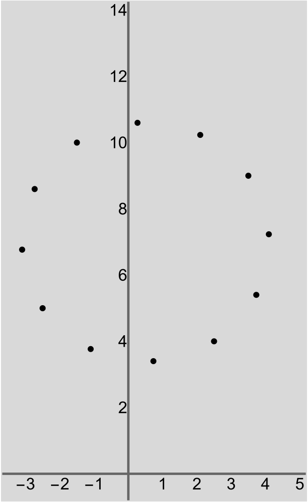
Решения системы для решёток

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\mathrm{G}}(a, \delta_1, \delta_2, N_1, N_2) = \{a + k\delta_1 + \ell\delta_2 \mid k = 0, \dots, N_1, \ell = 0, \dots, N_2\}$$

a	δ_1	δ_2	N_1	N_2	N	$\lvert b(\mathfrak{A}) - 1\rvert$
$-200 + 15\mathrm{i}$	50	$50\mathrm{i}$	5	5	36	$1.0523\ldots \cdot 10^{-57}$
$-5 + 15\mathrm{i}$	5	$5\mathrm{i}$	5	5	36	$5.7251\ldots \cdot 10^{-64}$
$30\mathrm{i}$	0.0001	$0.0001\mathrm{i}$	5	5	36	$1.1424\ldots \cdot 10^{-53}$
$0.25 + 30\mathrm{i}$	0.0001	0	59	0	60	$5.3809\ldots \cdot 10^{-98}$
$0.5 + 30\mathrm{i}$	0	$3\mathrm{i}$	0	59	60	$2.0739\ldots \cdot 10^{-56}$
$-200 + 10000\mathrm{i}$	50	$50\mathrm{i}$	5	5	36	$3.8883\ldots \cdot 10^{-51}$

$$N = (N_1 + 1)(N_2 + 1)$$

Дискретные круги



$$\mathfrak{A}_{\mathrm{C}}(c, r, N) = \{c + \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/N} r \mid k = 0, \ldots, N-1\}$$

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_{\mathrm{C}}(0.5 + 7\mathrm{i}, 3 + 2\mathrm{i}, 12)$$

$\mathfrak{A}_2$

Решения системы для дискретных кругов

$$\mathfrak{A}_{\mathrm{C}}(c, r, N) = \{c + \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/N} r \mid k = 0, \ldots, N-1\}$$

c	r	N	$\lvert b(\mathfrak{A}_{\mathrm{C}}(a, r, N)) - 1\rvert$
$10\mathrm{i}$	10^{-5}	24	$1.2861\ldots \cdot 10^{-32}$
$-1 + 20\mathrm{i}$	10^{-3}	36	$6.2669\ldots \cdot 10^{-52}$
$0.25 + 30\mathrm{i}$	10^{-1}	60	$5.4442\ldots \cdot 10^{-98}$
$0.6 + 40\mathrm{i}$	1	72	$1.1660\ldots \cdot 10^{-121}$
$1 + 50\mathrm{i}$	10	80	$4.6580\ldots \cdot 10^{-138}$
$2 + 60\mathrm{i}$	10^{2}	96	$4.5686\ldots \cdot 10^{-225}$
$70\mathrm{i}$	10^{3}	120	$3.9966\ldots \cdot 10^{-1623}$

Правило Крамера

$\mathfrak{A} = \{a_0, \ldots, a_{N-1}\}$ – комплексные числа в общем положении

$$\begin{array}{rcl}
\eta(a_0) + c_1\eta'(a_0) + \cdots + c_{N-1}\eta^{\langle N-1\rangle}(a_0) - b & = & 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\
\eta(a_{N-1}) + c_1\eta'(a_{N-1}) + \cdots + c_{N-1}\eta^{\langle N-1\rangle}(a_{N-1}) - b & = & 0
\end{array}$$

$b(\mathfrak{A}),\ c_1(\mathfrak{A}),\ \ldots,\ c_{N-1}(\mathfrak{A})$ – решение этой системы

$$b(\mathfrak{A}) = \frac{\begin{vmatrix} \eta(a_0) & \eta'(a_0) & \ldots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta(a_{N-1}) & \eta'(a_{N-1}) & \ldots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a_{N-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \eta'(a_0) & \ldots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \eta'(a_{N-1}) & \ldots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a_{N-1}) \end{vmatrix}} \approx 1$$

Характеристические многочлены

$$L(\mathfrak{A}) = \begin{pmatrix} \eta(a_0) & \eta'(a_0) & \dots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta(a_{N-1}) & \eta'(a_{N-1}) & \dots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a_{N-1}) \end{pmatrix}$$

$$M(\mathfrak{A}) = \begin{pmatrix} 1 & \eta'(a_0) & \dots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \eta'(a_{N-1}) & \dots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a_{N-1}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P(\mathfrak{A}) = \det(L(\mathfrak{A}) - \lambda E_N) &= V_N(\mathfrak{A})\lambda^N + \dots + V_n(\mathfrak{A})\lambda^n + \dots + V_0(\mathfrak{A}) \\ Q(\mathfrak{A}) = \det(M(\mathfrak{A}) - \lambda E_N) &= W_N(\mathfrak{A})\lambda^N + \dots + W_n(\mathfrak{A})\lambda^n + \dots + W_0(\mathfrak{A}) \end{aligned}$$

$$\frac{V_0(\mathfrak{A})}{W_0(\mathfrak{A})} = b(\mathfrak{A}) \approx 1 \qquad \frac{V_1(\mathfrak{A})}{W_1(\mathfrak{A})} \approx 1 \qquad \frac{V_2(\mathfrak{A})}{W_2(\mathfrak{A})} \approx 1 \qquad \dots$$

Отношения коэффициентов характеристических многочленов

n	$V_n(\mathfrak{A}_1)$		$\left\lvert \frac{V_n(\mathfrak{A}_1)}{W_n(\mathfrak{A}_1)} - 1 \right\rvert$
0	$-2.8932\ldots \cdot 10^{-48}$	$-5.1873\ldots \cdot 10^{-49}\mathrm{i}$	$1.1085\ldots \cdot 10^{-14}$
1	$1.1853\ldots \cdot 10^{-33}$	$+2.1097\ldots \cdot 10^{-34}\mathrm{i}$	$8.6263\ldots \cdot 10^{-13}$
2	$-2.2690\ldots \cdot 10^{-22}$	$-1.6178\ldots \cdot 10^{-22}\mathrm{i}$	$5.1025\ldots \cdot 10^{-11}$
3	$4.0262\ldots \cdot 10^{-14}$	$+8.4755\ldots \cdot 10^{-14}\mathrm{i}$	$3.6813\ldots \cdot 10^{-9}$
4	$-3.7956\ldots \cdot 10^{-8}$	$+2.0698\ldots \cdot 10^{-7}\mathrm{i}$	$1.7175\ldots \cdot 10^{-7}$
5	$1.5216\ldots \cdot 10^{-3}$	$+8.8240\ldots \cdot 10^{-3}\mathrm{i}$	$8.2908\ldots \cdot 10^{-6}$
6	$3.7984\ldots \cdot 10^{0}$	$-4.2877\ldots \cdot 10^{0}\mathrm{i}$	$1.0541\ldots \cdot 10^{-4}$
7	$-3.0090\ldots \cdot 10^{2}$	$+4.8652\ldots \cdot 10^{2}\mathrm{i}$	$2.3986\ldots \cdot 10^{-3}$
8	$-1.8858\ldots \cdot 10^{3}$	$+4.2625\ldots \cdot 10^{2}\mathrm{i}$	$1.8282\ldots \cdot 10^{-2}$
9	$-1.1127\ldots \cdot 10^{3}$	$+9.0420\ldots \cdot 10^{2}\mathrm{i}$	$5.7323\ldots \cdot 10^{-2}$
10	$-5.2122\ldots \cdot 10^{1}$	$+2.1236\ldots \cdot 10^{1}\mathrm{i}$	$1.0387\ldots \cdot 10^{0}$
11	$1.0390\ldots \cdot 10^{1}$	$-7.6856\ldots \cdot 10^{0}\mathrm{i}$	$5.2691\ldots \cdot 10^{-1}$

Решения системы для решёток (повтор)

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\mathrm{G}}(a, \delta_1, \delta_2, N_1, N_2) = \{a + k\delta_1 + \ell\delta_2 \mid k = 0, \dots, N_1, \ell = 0, \dots, N_2\}$$

a	δ_1	δ_2	N_1	N_2	N	$\lvert b(\mathfrak{A}) - 1\rvert$
$-200 + 15\mathrm{i}$	50	$50\mathrm{i}$	5	5	36	$1.0523\ldots \cdot 10^{-57}$
$-5 + 15\mathrm{i}$	5	$5\mathrm{i}$	5	5	36	$5.7251\ldots \cdot 10^{-64}$
$30\mathrm{i}$	0.0001	$0.0001\mathrm{i}$	5	5	36	$1.1424\ldots \cdot 10^{-53}$
$0.25 + 30\mathrm{i}$	0.0001	0	59	0	60	$5.3809\ldots \cdot 10^{-98}$
$0.5 + 30\mathrm{i}$	0	$3\mathrm{i}$	0	59	60	$2.0739\ldots \cdot 10^{-56}$
$-200 + 10000\mathrm{i}$	50	$50\mathrm{i}$	5	5	36	$3.8883\ldots \cdot 10^{-51}$

$$b(\mathfrak{A}) = \frac{\begin{vmatrix} \eta(a_0) & \eta'(a_0) & \dots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta(a_{N-1}) & \eta'(a_{N-1}) & \dots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a_{N-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \eta'(a_0) & \dots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \eta'(a_{N-1}) & \dots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a_{N-1}) \end{vmatrix}}$$

Правило Лопиталя

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{g(a+\varepsilon)-g(a)} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(f(a+\varepsilon)-f(a))/\varepsilon}{(g(a+\varepsilon)-g(a))/\varepsilon}\\
&= \frac{\lim_{\varepsilon\to 0}(f(a+\varepsilon)-f(a))/\varepsilon}{\lim_{\varepsilon\to 0}(g(a+\varepsilon)-g(a))/\varepsilon}\\
&= \frac{f'(a)}{g'(a)}
\end{aligned}
$$

“Правило Лопиталя” для определителей

$$b(\mathfrak{A}) = \frac{\begin{vmatrix} \eta(a_0) & \eta'(a_0) & \dots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta(a_{N-1}) & \eta'(a_{N-1}) & \dots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a_{N-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \eta'(a_0) & \dots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \eta'(a_{N-1}) & \dots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a_{N-1}) \end{vmatrix}}$$

$$a_0 = a \quad a_1 = a + \varepsilon \quad a_2 = a + 2\varepsilon \quad \dots \quad a_{N-1} = a + (N-1)\varepsilon$$

$$b_N(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} b(\mathfrak{A}) = \frac{\begin{vmatrix} \eta(a) & \eta'(a) & \dots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a) \\ \eta'(a) & \eta''(a) & \dots & \eta^{\langle N\rangle}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta^{\langle N-1\rangle}(a) & \eta^{\langle N\rangle}(a) & \dots & \eta^{\langle 2N-2\rangle}(a) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta''(a) & \dots & \eta^{\langle N\rangle}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta^{\langle N\rangle}(a) & \dots & \eta^{\langle 2N-2\rangle}(a) \end{vmatrix}} \overset{?}{\approx} 1$$

Предельные значения

a	$\lvert b_N(a) - 1 \rvert$		
	$N = 20$	$N = 70$	$N = 200$
-6	$3.9870\ldots \cdot 10^{-18}$	$1.7014\ldots \cdot 10^{-105}$	$3.7560\ldots \cdot 10^{-368}$
-3	$4.7492\ldots \cdot 10^{-22}$	$6.5289\ldots \cdot 10^{-111}$	$6.8468\ldots \cdot 10^{-375}$
-1	$1.2054\ldots \cdot 10^{-24}$	$1.6130\ldots \cdot 10^{-114}$	$2.2057\ldots \cdot 10^{-379}$
$-1 + 300\mathrm{i}$	$2.8175\ldots \cdot 10^{-16}$	$1.5955\ldots \cdot 10^{-98}$	$1.0048\ldots \cdot 10^{-378}$
-0.8	$6.6429\ldots \cdot 10^{-25}$	$7.0318\ldots \cdot 10^{-115}$	$7.8416\ldots \cdot 10^{-380}$
$-0.8 + 50\mathrm{i}$	$4.9124\ldots \cdot 10^{-24}$	$1.6522\ldots \cdot 10^{-115}$	$4.8600\ldots \cdot 10^{-380}$
0	$6.1439\ldots \cdot 10^{-26}$	$2.5409\ldots \cdot 10^{-116}$	$1.2527\ldots \cdot 10^{-381}$
$50\mathrm{i}$	$5.1433\ldots \cdot 10^{-25}$	$6.3145\ldots \cdot 10^{-117}$	$7.8169\ldots \cdot 10^{-382}$
$300\mathrm{i}$	$1.4208\ldots \cdot 10^{-17}$	$2.4131\ldots \cdot 10^{-100}$	$6.6292\ldots \cdot 10^{-381}$
$1500\mathrm{i}$	$3.5498\ldots \cdot 10^{-14}$	$3.8431\ldots \cdot 10^{-80}$	$3.1958\ldots \cdot 10^{-307}$
$0.2 + 10\mathrm{i}$	$2.4939\ldots \cdot 10^{-26}$	$1.0349\ldots \cdot 10^{-116}$	$4.3685\ldots \cdot 10^{-382}$
$0.2 + 100\mathrm{i}$	$1.6846\ldots \cdot 10^{-21}$	$3.3113\ldots \cdot 10^{-117}$	$8.0859\ldots \cdot 10^{-383}$
0.5	$1.3906\ldots \cdot 10^{-26}$	$3.1908\ldots \cdot 10^{-117}$	$9.4420\ldots \cdot 10^{-383}$
$0.5 + 50\mathrm{i}$	$1.2520\ldots \cdot 10^{-25}$	$8.2073\ldots \cdot 10^{-118}$	$5.9166\ldots \cdot 10^{-383}$
$0.5 + 1500\mathrm{i}$	$6.7418\ldots \cdot 10^{-15}$	$1.0285\ldots \cdot 10^{-80}$	$4.0432\ldots \cdot 10^{-308}$
0.8	$5.7069\ldots \cdot 10^{-27}$	$9.1900\ldots \cdot 10^{-118}$	$2.0017\ldots \cdot 10^{-383}$
$0.8 + 300\mathrm{i}$	$1.1103\ldots \cdot 10^{-18}$	$7.2488\ldots \cdot 10^{-102}$	$1.1928\ldots \cdot 10^{-382}$
$0.8 + 1500\mathrm{i}$	$2.7648\ldots \cdot 10^{-15}$	$4.2959\ldots \cdot 10^{-81}$	$1.0755\ldots \cdot 10^{-308}$
$1 + 10\mathrm{i}$	$2.3862\ldots \cdot 10^{-27}$	$3.7524\ldots \cdot 10^{-118}$	$6.9829\ldots \cdot 10^{-384}$
$1 + 50\mathrm{i}$	$3.0417\ldots \cdot 10^{-26}$	$1.0666\ldots \cdot 10^{-118}$	$4.4787\ldots \cdot 10^{-384}$
$1 + 300\mathrm{i}$	$5.7549\ldots \cdot 10^{-19}$	$2.9804\ldots \cdot 10^{-102}$	$4.3682\ldots \cdot 10^{-383}$
$2 + 10\mathrm{i}$	$1.2736\ldots \cdot 10^{-28}$	$5.9438\ldots \cdot 10^{-120}$	$3.9701\ldots \cdot 10^{-386}$
$2 + 1500\mathrm{i}$	$1.3975\ldots \cdot 10^{-16}$	$7.2077\ldots \cdot 10^{-83}$	$1.7403\ldots \cdot 10^{-311}$

Предсказания

Гипотеза 1. *Для всех комплексных a, кроме, быть может, счётного количества значений,*

$$\frac{\begin{vmatrix} \eta(a) & \eta'(a) & \dots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a) \\ \eta'(a) & \eta''(a) & \dots & \eta^{\langle N\rangle}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta^{\langle N-1\rangle}(a) & \eta^{\langle N\rangle}(a) & \dots & \eta^{\langle 2N-2\rangle}(a) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta''(a) & \dots & \eta^{\langle N\rangle}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta^{\langle N\rangle}(a) & \dots & \eta^{\langle 2N-2\rangle}(a) \end{vmatrix}} \underset{N\to\infty}{\to} 1$$

Предсказания

Гипотеза 2. *Для всех комплексных a, кроме, быть может, счётного количества значений,*

$$b^{!}_{N}(a)=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\eta(a)}{0!} & \frac{\eta'(a)}{1!} & \cdots & \frac{\eta^{\langle N-1\rangle}}{(N-1)!}\\ \frac{\eta'(a)}{1!} & \frac{\eta''(a)}{2!} & \cdots & \frac{\eta^{\langle N\rangle}(a)}{N!}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\eta^{\langle N-1\rangle}(a)}{(N-1)!} & \frac{\eta^{\langle N\rangle}(a)}{N!} & \cdots & \frac{\eta^{\langle 2N-2\rangle}(a)}{(2N-2)!}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\eta''(a)}{2!} & \cdots & \frac{\eta^{\langle N\rangle}(a)}{N!}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\eta^{\langle N\rangle}(a)}{N!} & \cdots & \frac{\eta^{\langle 2N-2\rangle}(a)}{(2N-2)!}\end{vmatrix}}\underset{N\to\infty}{\to}1$$

Численные значения в пользу гипотезы 2

a	$\lvert b_N^!(a)-1\rvert$		
	$N=70$	$N=200$	$N=700$
-2	$6.6474\ldots\cdot 10^{-3}$	$4.2041\ldots\cdot 10^{-5}$	$1.0842\ldots\cdot 10^{-13}$
-1	$9.9362\ldots\cdot 10^{-3}$	$8.6712\ldots\cdot 10^{-6}$	$1.8735\ldots\cdot 10^{-14}$
-0.8	$1.1821\ldots\cdot 10^{-2}$	$1.0637\ldots\cdot 10^{-5}$	$1.2612\ldots\cdot 10^{-14}$
0	$1.2694\ldots\cdot 10^{-2}$	$1.5834\ldots\cdot 10^{-6}$	$2.3561\ldots\cdot 10^{-15}$
$50\mathrm{i}$	$9.9046\ldots\cdot 10^{-2}$	$5.6900\ldots\cdot 10^{-5}$	$1.0808\ldots\cdot 10^{-14}$
0.2	$3.9934\ldots\cdot 10^{-3}$	$8.0428\ldots\cdot 10^{-7}$	$3.7177\ldots\cdot 10^{-14}$
$0.2+10\mathrm{i}$	$9.6420\ldots\cdot 10^{-4}$	$1.1453\ldots\cdot 10^{-6}$	$4.8160\ldots\cdot 10^{-15}$
0.5	$1.2866\ldots\cdot 10^{-3}$	$3.1413\ldots\cdot 10^{-7}$	$8.2725\ldots\cdot 10^{-16}$
0.8	$4.8940\ldots\cdot 10^{-4}$	$1.6870\ldots\cdot 10^{-7}$	$3.1938\ldots\cdot 10^{-16}$
$0.8+10\mathrm{i}$	$2.5509\ldots\cdot 10^{-4}$	$2.6686\ldots\cdot 10^{-7}$	$7.1105\ldots\cdot 10^{-16}$
$1+10\mathrm{i}$	$3.4554\ldots\cdot 10^{-4}$	$2.3766\ldots\cdot 10^{-7}$	$4.4841\ldots\cdot 10^{-16}$
$1+50\mathrm{i}$	$8.7300\ldots\cdot 10^{-2}$	$4.6678\ldots\cdot 10^{-6}$	$4.5817\ldots\cdot 10^{-16}$
$2+10\mathrm{i}$	$2.4417\ldots\cdot 10^{-4}$	$1.4395\ldots\cdot 10^{-7}$	$2.5638\ldots\cdot 10^{-17}$

Предсказания

Гипотеза 1 (повторение). *Для всех a, кроме быть может счётного количества значений,*

$$\frac{\begin{vmatrix} \eta(a) & \eta'(a) & \dots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a) \\ \eta'(a) & \eta''(a) & \dots & \eta^{\langle N\rangle}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta^{\langle N-1\rangle}(a) & \eta^{\langle N\rangle}(a) & \dots & \eta^{\langle 2N-2\rangle}(a) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta''(a) & \dots & \eta^{\langle N\rangle}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta^{\langle N\rangle}(a) & \dots & \eta^{\langle 2N-2\rangle}(a) \end{vmatrix}} \underset{N\to\infty}{\to} 1$$

Предсказания

Гипотеза 1 (переформулировка). *Для всех комплексных a, кроме, быть может, счётного количества значений,*

$$\frac{\det(L_N(a))}{\det(M_N(a))} \underset{N\to\infty}{\to} 1,$$

где

$$L_N(a) = \begin{pmatrix} \eta(a) & \eta'(a) & \dots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a) \\ \eta'(a) & \eta''(a) & \dots & \eta^{\langle N\rangle}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta^{\langle N-1\rangle}(a) & \eta^{\langle N\rangle}(a) & \dots & \eta^{\langle 2N-2\rangle}(a) \end{pmatrix},$$

а матрица $M_N(a)$ получается из матрицы $L_N(a)$ вычёркиванием первого столбца и первой строки.

Предсказания

Гипотеза 1 (обобщение). *Пусть* $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ *и* $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ *– конечные множества положительных целых чисел, отличных от* 1. *Для всех комплексных* a*, кроме быть может счётного количества значений,*

$$\frac{\det(L_{I,J,N}(a))}{\det(M_{I,J,N}(a))} \underset{N\to\infty}{\to} 1$$

где $L_{I,J,N}(a)$ – матрица, получающаяся из матрицы

$$\begin{pmatrix} \eta(a) & \eta'(a) & \ldots & \eta^{\langle N-1\rangle}(a) \\ \eta'(a) & \eta''(a) & \ldots & \eta^{\langle N\rangle}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta^{\langle N-1\rangle}(a) & \eta^{\langle N\rangle}(a) & \ldots & \eta^{\langle 2N-2\rangle}(a) \end{pmatrix},$$

вычёркиванием столбцов с номерами $i_1, \ldots, i_k$ и строк с номерами $j_1, \ldots, j_k$, а матрица $M_{I,J,N}(a)$ получается из матрицы $L_{I,J,N}(a)$ вычёркиванием первого столбца и первой строки.

I	J	$\left\lvert \frac{\det(L_{I,J,N}(a))}{\det(M_{I,J,N}(a))} - 1 \right\rvert$	
		$N = 40$	$N = 150$
$\{2\}$	$\{2\}$	$1.5705\ldots \cdot 10^{-57}$	$4.1503\ldots \cdot 10^{-273}$
	$\{2,4\}$	$1.5883\ldots \cdot 10^{-56}$	$1.4302\ldots \cdot 10^{-271}$
	$\{4,6\}$	$4.4938\ldots \cdot 10^{-57}$	$4.2342\ldots \cdot 10^{-272}$
	$\{2,4,6\}$	$1.9855\ldots \cdot 10^{-55}$	$5.9628\ldots \cdot 10^{-270}$
	$\{2,4,5,6,8\}$	$6.3476\ldots \cdot 10^{-53}$	$1.9159\ldots \cdot 10^{-266}$
$\{2,4\}$	$\{2\}$	$1.5883\ldots \cdot 10^{-56}$	$1.4302\ldots \cdot 10^{-271}$
	$\{2,4\}$	$1.6076\ldots \cdot 10^{-55}$	$4.9296\ldots \cdot 10^{-270}$
	$\{2,3,4\}$	$1.0726\ldots \cdot 10^{-53}$	$1.0420\ldots \cdot 10^{-267}$
	$\{4,6\}$	$4.5482\ldots \cdot 10^{-56}$	$1.4593\ldots \cdot 10^{-270}$
	$\{2,4,5,6,8\}$	$6.4409\ldots \cdot 10^{-52}$	$6.6060\ldots \cdot 10^{-265}$
$\{2,3,4\}$	$\{2\}$	$1.0588\ldots \cdot 10^{-54}$	$3.0229\ldots \cdot 10^{-269}$
	$\{2,3,4\}$	$7.1626\ldots \cdot 10^{-52}$	$2.2028\ldots \cdot 10^{-265}$
	$\{4,6\}$	$3.0343\ldots \cdot 10^{-54}$	$3.0848\ldots \cdot 10^{-268}$
	$\{2,4,6\}$	$1.3430\ldots \cdot 10^{-52}$	$4.3452\ldots \cdot 10^{-266}$
	$\{2,4,5,6,8\}$	$4.3085\ldots \cdot 10^{-50}$	$1.3968\ldots \cdot 10^{-262}$
$\{4,6\}$	$\{2\}$	$4.4938\ldots \cdot 10^{-57}$	$4.2342\ldots \cdot 10^{-272}$
	$\{2,4\}$	$4.5482\ldots \cdot 10^{-56}$	$1.4593\ldots \cdot 10^{-270}$
	$\{4,6\}$	$1.2867\ldots \cdot 10^{-56}$	$4.3204\ldots \cdot 10^{-271}$
	$\{2,4,6\}$	$5.6898\ldots \cdot 10^{-55}$	$6.0849\ldots \cdot 10^{-269}$
	$\{2,4,5,6,8\}$	$1.8219\ldots \cdot 10^{-52}$	$1.9556\ldots \cdot 10^{-265}$
$\{2,4,6\}$	$\{2\}$	$1.9855\ldots \cdot 10^{-55}$	$5.9628\ldots \cdot 10^{-270}$
	$\{2,4\}$	$2.0112\ldots \cdot 10^{-54}$	$2.0554\ldots \cdot 10^{-268}$
	$\{2,3,4\}$	$1.3430\ldots \cdot 10^{-52}$	$4.3452\ldots \cdot 10^{-266}$
	$\{2,4,6\}$	$2.5183\ldots \cdot 10^{-53}$	$8.5712\ldots \cdot 10^{-267}$
	$\{2,4,5,6,8\}$	$8.0783\ldots \cdot 10^{-51}$	$2.7554\ldots \cdot 10^{-263}$
$\{2,4,5,6,8\}$	$\{2\}$	$6.3476\ldots \cdot 10^{-53}$	$1.9159\ldots \cdot 10^{-266}$
	$\{2,3,4\}$	$4.3085\ldots \cdot 10^{-50}$	$1.3968\ldots \cdot 10^{-262}$
	$\{2,4,6\}$	$8.0783\ldots \cdot 10^{-51}$	$2.7554\ldots \cdot 10^{-263}$
	$\{2,4,5,6,8\}$	$2.6003\ldots \cdot 10^{-48}$	$8.8624\ldots \cdot 10^{-260}$

https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2024/24-01.html

http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.30721.67686

Спасибо за внимание!