Звёздочка Клини в структурах с делениями

С. Л. Кузнецов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

7 декабря 2018 г.

Алгебра формальных языков

Первый пример алгебраической структуры с делениями: алгебра формальных языков $\mathcal{P}(\Sigma^*)$.

- Σ^* — множество всех слов (включая пустое) из букв алфавита Σ.

Алгебра формальных языков

Первый пример алгебраической структуры с делениями: алгебра формальных языков $\mathcal{P}(\Sigma^*)$.

- Σ^* — множество всех слов (включая пустое) из букв алфавита Σ.
- Формальный язык — произвольное подмножество Σ^*; с лингвистической точки зрения — синтаксический тип (категория) слов и словосочетаний.

Алгебра формальных языков

Первый пример алгебраической структуры с делениями: алгебра формальных языков $\mathcal{P}(\Sigma^*)$.

- Σ^* — множество всех слов (включая пустое) из букв алфавита Σ.
- Формальный язык — произвольное подмножество Σ^*; с лингвистической точки зрения — синтаксический тип (категория) слов и словосочетаний.
- *Умножение* формальных языков:

$$A \cdot B = \{uv \mid u \in A, v \in B\}$$

Алгебра формальных языков

Первый пример алгебраической структуры с делениями: алгебра формальных языков $\mathcal{P}(\Sigma^*)$.

- Σ^* — множество всех слов (включая пустое) из букв алфавита Σ.
- Формальный язык — произвольное подмножество Σ^*; с лингвистической точки зрения — синтаксический тип (категория) слов и словосочетаний.
- *Умножение* формальных языков:

$$A \cdot B = \{uv \mid u \in A, v \in B\}$$

- *Деление:* $A \setminus B$ состоит из таких слов, которые после приписывания слева слова из A попадают в B.

Алгебра формальных языков

Первый пример алгебраической структуры с делениями: алгебра формальных языков $\mathcal{P}(\Sigma^*)$.

- Σ^* — множество всех слов (включая пустое) из букв алфавита Σ.
- Формальный язык — произвольное подмножество Σ^*; с лингвистической точки зрения — синтаксический тип (категория) слов и словосочетаний.
- *Умножение* формальных языков:

$$A \cdot B = \{uv \mid u \in A, v \in B\}$$

- *Деление:* $A \setminus B$ состоит из таких слов, которые после приписывания слева слова из A попадают в B.
  $B \,/\, A$: —»— справа —»—

Деление: лингвистические примеры

S — категория правильно построенных предложений;
N — категория имён существительных и именных групп
(«Иван», «синяя книга», «книга, которую я не прочитал», ...);

Деление: лингвистические примеры

S — категория правильно построенных предложений;
N — категория имён существительных и именных групп («Иван», «синяя книга», «книга, которую я не прочитал», ...);

$N \setminus S$ — категория непереходных глаголов и глагольных групп:

Деление: лингвистические примеры

S — категория правильно построенных предложений;
N — категория имён существительных и именных групп («Иван», «синяя книга», «книга, которую я не прочитал», ...);

$N \setminus S$ — категория непереходных глаголов и глагольных групп:
имя существительное + непереходный глагол = предложение

Деление: лингвистические примеры

S — категория правильно построенных предложений;
N — категория имён существительных и именных групп
(«Иван», «синяя книга», «книга, которую я не прочитал», ...);

$N \setminus S$ — категория непереходных глаголов и глагольных групп:
имя существительное $+$ непереходный глагол $=$ предложение

Солнце	светит
N	$(N \setminus S)$

Деление: лингвистические примеры

S — категория правильно построенных предложений;
N — категория имён существительных и именных групп
(«Иван», «синяя книга», «книга, которую я не прочитал», ...);

$N \setminus S$ — категория непереходных глаголов и глагольных групп:
имя существительное + непереходный глагол = предложение

Солнце светит
$N \cdot (N \setminus S) \subseteq S$

Деление: лингвистические примеры

S — категория правильно построенных предложений;
N — категория имён существительных и именных групп
(«Иван», «синяя книга», «книга, которую я не прочитал», ...);

$N \setminus S$ — категория непереходных глаголов и глагольных групп:
имя существительное + непереходный глагол = предложение

Солнце светит
N , $(N \setminus S) \to S$

Деление: лингвистические примеры

S — категория правильно построенных предложений;
N — категория имён существительных и именных групп
(«Иван», «синяя книга», «книга, которую я не прочитал», ...);

$N \setminus S$ — категория непереходных глаголов и глагольных групп:
имя существительное + непереходный глагол = предложение

Солнце светит
$N \quad , \; (N \setminus S) \to S$

Иван любит Марью
$N, (N \setminus S) / N, N \to S$

Деление: лингвистические примеры

S — категория правильно построенных предложений;
N — категория имён существительных и именных групп
(«Иван», «синяя книга», «книга, которую я не прочитал», ...);

$N \setminus S$ — категория непереходных глаголов и глагольных групп:
имя существительное + непереходный глагол = предложение

Солнце светит
$N \quad , \; (N \setminus S) \to S$

Иван любит Марью
$N, (N \setminus S) \,/\, N, N \to S$

книга, которую я прочитал
$N, (N \setminus N) \,/ (S \,/\, N), N, (N \setminus S) \,/\, N \to N$

Деление: лингвистические примеры

S — категория правильно построенных предложений;
N — категория имён существительных и именных групп
(«Иван», «синяя книга», «книга, которую я не прочитал», ...);

$N \setminus S$ — категория непереходных глаголов и глагольных групп:
имя существительное + непереходный глагол = предложение

Солнце светит
$N \quad , \ (N \setminus S) \to S$

Иван любит Марью
$N, (N \setminus S) / N, N \to S$

книга, которую я прочитал
$N, (N \setminus N) / (S / N), N, (N \setminus S) / N \to N$

...

Деление формальных языков

- Определение:

$$A \setminus B = \{u \in \Sigma^* \mid (\forall v \in A)\, vu \in B\}$$
$$B \,/\, A = \{u \in \Sigma^* \mid (\forall v \in A)\, uv \in B\}$$

Деление формальных языков

- Определение:

$$A \setminus B = \{u \in \Sigma^* \mid (\forall v \in A)\, vu \in B\}$$
$$B \,/\, A = \{u \in \Sigma^* \mid (\forall v \in A)\, uv \in B\}$$

- Основное свойство (однозначно определяет эти операции):

$$B \subseteq A \setminus C \iff A \cdot B \subseteq C \iff A \subseteq C \,/\, B$$

Деление формальных языков

- Определение:

$$A \setminus B = \{u \in \Sigma^* \mid (\forall v \in A)\, vu \in B\}$$
$$B \,/\, A = \{u \in \Sigma^* \mid (\forall v \in A)\, uv \in B\}$$

- Основное свойство (однозначно определяет эти операции):

$$B \subseteq A \setminus C \iff A \cdot B \subseteq C \iff A \subseteq C \,/\, B$$

Это основные правила *исчисления Ламбека.*

Ещё операции на формальных языках

- $\cup$ и $\cap$ — пересечение и объединение;

Ещё операции на формальных языках

- $\cup$ и $\cap$ — пересечение и объединение;
- *Звёздочка Клини:* если S — множество предложений, то S^* — множество текстов (включая пустой).

Ещё операции на формальных языках

- $\cup$ и $\cap$ — пересечение и объединение;
- *Звёздочка Клини:* если S — множество предложений, то S^* — множество текстов (включая пустой).
  $S^+ = S \cdot S^*$ — только непустые

Ещё операции на формальных языках

- $\cup$ и $\cap$ — пересечение и объединение;
- *Звёздочка Клини:* если S — множество предложений, то S^* — множество текстов (включая пустой).
  $S^+ = S \cdot S^*$ — только непустые

$$A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$$

Ещё операции на формальных языках

- $\cup$ и $\cap$ — пересечение и объединение;
- *Звёздочка Клини:* если S — множество предложений, то S^* — множество текстов (включая пустой).
  $S^+ = S \cdot S^*$ — только непустые

$$A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$$

Омега-правило: если $A^n \subseteq B$ для всех $n \geq 0$, то $A^* \subseteq B$.

Ещё операции на формальных языках

- $\cup$ и $\cap$ — пересечение и объединение;
- *Звёздочка Клини:* если S — множество предложений, то S^* — множество текстов (включая пустой).
  $S^+ = S \cdot S^*$ — только непустые

$$A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$$

Омега-правило: если $A^n \subseteq B$ для всех $n \geq 0$, то $A^* \subseteq B$.
Правило индукции: если $\varepsilon \in B$ и $A \cdot B \subseteq B$, то $A^* \subseteq B$.

Ещё операции на формальных языках

- $\cup$ и $\cap$ — пересечение и объединение;
- *Звёздочка Клини:* если S — множество предложений, то S^* — множество текстов (включая пустой).
  $S^+ = S \cdot S^*$ — только непустые

  $$A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$$

  Омега-правило: если $A^n \subseteq B$ для всех $n \geq 0$, то $A^* \subseteq B$.
  Правило индукции: если $\varepsilon \in B$ и $A \cdot B \subseteq B$, то $A^* \subseteq B$.
- Единица: $\mathbf{1} = \{\varepsilon\}$.

Алгебра бинарных отношений

Второй пример: алгебра бинарных отношений $\mathcal{P}(W \times W)$.

Алгебра бинарных отношений

Второй пример: алгебра бинарных отношений $\mathcal{P}(W \times W)$.

- $R \subseteq W \times W$ — бинарное отношение на множестве W.

Алгебра бинарных отношений

Второй пример: алгебра бинарных отношений $\mathcal{P}(W \times W)$.

- $R \subseteq W \times W$ — бинарное отношение на множестве W.
- Умножение — композиция отношений:

$$R \circ S = \{\langle x, z\rangle \mid (\exists y \in W)\, \langle x, y\rangle \in R, \langle y, z\rangle \in S\}$$

Алгебра бинарных отношений

Второй пример: алгебра бинарных отношений $\mathcal{P}(W \times W)$.

- $R \subseteq W \times W$ — бинарное отношение на множестве W.
- Умножение — композиция отношений:

$$R \circ S = \{\langle x, z\rangle \mid (\exists y \in W)\, \langle x, y\rangle \in R, \langle y, z\rangle \in S\}$$

- Деления определяются теми же основными соотношениями:

$$R \setminus S = \{\langle y, z\rangle \mid (\forall \langle x, y\rangle \in R)\, \langle x, z\rangle \in S\}$$
$$S \,/\, R = \{\langle x, y\rangle \mid (\forall \langle y, z\rangle \in R)\, \langle x, z\rangle \in S\}$$

Алгебра бинарных отношений

Второй пример: алгебра бинарных отношений $\mathcal{P}(W \times W)$.

- $R \subseteq W \times W$ — бинарное отношение на множестве W.
- Умножение — композиция отношений:

$$R \circ S = \{\langle x, z \rangle \mid (\exists y \in W)\, \langle x, y \rangle \in R, \langle y, z \rangle \in S\}$$

- Деления определяются теми же основными соотношениями:

$$R \setminus S = \{\langle y, z \rangle \mid (\forall \langle x, y \rangle \in R)\, \langle x, z \rangle \in S\}$$
$$S \,/\, R = \{\langle x, y \rangle \mid (\forall \langle y, z \rangle \in R)\, \langle x, z \rangle \in S\}$$

- Неформальная интерпретация. $\langle x, y \rangle \in R$: из x в y можно перейти, совершив действие типа R.
  $R \circ S$ — сначала R, потом S; $R \setminus S$ — тип таких действий, что если перед ним совершить действие R, то получится действие S; $S \,/\, R$ — симметрично.

Алгебра бинарных отношений

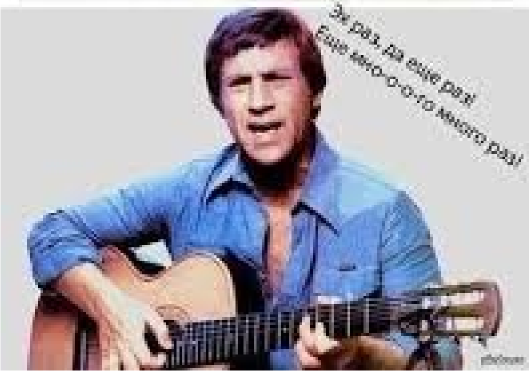
- Теоретико-множественные $\cap$ и $\cup$.

Алгебра бинарных отношений

- Теоретико-множественные $\cap$ и $\cup$.
- $\mathbf{1} = \{\langle x, x \rangle \mid x \in W\}$ — диагональ. («ничего не делать»)

Алгебра бинарных отношений

- Теоретико-множественные $\cap$ и $\cup$.
- $\mathbf{1} = \{\langle x, x\rangle \mid x \in W\}$ — диагональ. («ничего не делать»)
- Итерация Клини = рефлексивно-транзитивное замыкание. («совершить действие несколько раз»)


Эх раз, да еще раз!
Еще мно-о-о-го много раз!

Абстрактное алгебраическое определение

- *моноидом с делениями* называется частично упорядоченный моноид $\langle \mathfrak{A}, \cdot, \mathbf{1}, \preceq \rangle$ с операциями деления, удовлетворяющим следующим равносильностям (для всех a, b, c):

$$b \preceq a \setminus b \iff a \cdot b \preceq c \iff a \preceq c \,/\, b$$

- моноид с делениями называется *решёткой с делениями*, если предпорядок $\preceq$ задаёт структуру решётки:

$$a \vee b = \sup_{\preceq}\{a, b\} \qquad a \wedge b = \inf_{\preceq}\{a, b\}$$

- решётка с делениями является *решёткой Клини с делениями*, если на ней дополнительно определена операция итерации:
  1. $\mathbf{1} \preceq a$ и $a \cdot a^* \preceq a^*$ для всех a;
  2. для любого b если $\mathbf{1} \preceq b$ и $ab \preceq b$, то $a^* \preceq b$.
- решётка Клини с делениями называется **-непрерывной*, если $a^* = \sup\{a^n \mid n \geq 0\}$ для всех a.

Исчисления

- **MALC**: логика решёток с делениями

$$A \preceq A \qquad (A \cdot B) \cdot C \equiv A \cdot (B \cdot C) \qquad \mathbf{1} \cdot A \equiv A \equiv A \cdot \mathbf{1}$$

$$\dfrac{\dfrac{B \preceq A \setminus C}{A \cdot B \preceq C}}{A \preceq C \,/\, B} \qquad \begin{array}{c} A_i \preceq A_1 \vee A_2 \\ \dfrac{A_1 \preceq C \quad A_2 \preceq C}{A_1 \vee A_2 \preceq C} \end{array} \qquad \begin{array}{c} A_1 \wedge A_2 \preceq A_i \\ \dfrac{B \preceq A_1 \quad B \preceq A_2}{B \preceq A_1 \wedge A_2} \end{array}$$

Исчисления

- **MALC**: логика решёток с делениями

$$A \preceq A \qquad (A \cdot B) \cdot C \equiv A \cdot (B \cdot C) \qquad \mathbf{1} \cdot A \equiv A \equiv A \cdot \mathbf{1}$$

$$\dfrac{\dfrac{B \preceq A \setminus C}{A \cdot B \preceq C}}{A \preceq C \,/\, B} \qquad A_i \preceq A_1 \vee A_2 \qquad A_1 \wedge A_2 \preceq A_i$$

$$\frac{A_1 \preceq C \quad A_2 \preceq C}{A_1 \vee A_2 \preceq C} \qquad \frac{B \preceq A_1 \quad B \preceq A_2}{B \preceq A_1 \wedge A_2}$$

- **ACT**: индуктивное определение

$$\mathbf{1} \preceq A^* \qquad A \cdot A^* \preceq A^* \qquad \frac{\mathbf{1} \preceq B \quad A \cdot B \preceq B}{A^* \preceq B}$$

Исчисления

- **MALC**: логика решёток с делениями

$$A \preceq A \qquad (A \cdot B) \cdot C \equiv A \cdot (B \cdot C) \qquad \mathbf{1} \cdot A \equiv A \equiv A \cdot \mathbf{1}$$

$$\frac{\dfrac{B \preceq A \setminus C}{A \cdot B \preceq C}}{A \preceq C \,/\, B} \qquad \begin{array}{c} A_i \preceq A_1 \vee A_2 \\ \dfrac{A_1 \preceq C \quad A_2 \preceq C}{A_1 \vee A_2 \preceq C} \end{array} \qquad \begin{array}{c} A_1 \wedge A_2 \preceq A_i \\ \dfrac{B \preceq A_1 \quad B \preceq A_2}{B \preceq A_1 \wedge A_2} \end{array}$$

- **ACT**: индуктивное определение

$$\mathbf{1} \preceq A^* \qquad A \cdot A^* \preceq A^* \qquad \frac{\mathbf{1} \preceq B \quad A \cdot B \preceq B}{A^* \preceq B}$$

- **ACT**$_\omega$: омега-правило

$$A^n \preceq A^* \ (n \geq 0) \qquad \frac{\left(A^n \preceq B\right)_{n=0}^{\infty}}{A^* \preceq B}$$

Секвенциальные (генценовские) исчисления: **MALC**

$$\frac{}{A \to A}\ (\mathrm{ax})$$

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, \Pi, A \setminus B, \Delta \to C}\ (\setminus \to) \qquad \frac{A, \Pi \to B}{\Pi \to A \setminus B}\ (\to \setminus)$$

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, B \,/\, A, \Pi, \Delta \to C}\ (/ \to) \qquad \frac{\Pi, A \to B}{\Pi \to B \,/\, A}\ (\to /)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \to C}{\Gamma, A \cdot B, \Delta \to C}\ (\cdot \to) \qquad \frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma, \Delta \to A \cdot B}\ (\to \cdot)$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \to C}{\Gamma, \mathbf{1}, \Delta \to C}\ (\mathbf{1} \to) \qquad \frac{}{\Lambda \to \mathbf{1}}\ (\to \mathbf{1})$$

$$\frac{\Gamma, A_i, \Delta \to C}{\Gamma, A_1 \wedge A_2, \Delta \to C}\ (\wedge \to)_i,\ \ i = 1, 2 \qquad \frac{\Pi \to A_1 \quad \Pi \to A_2}{\Pi \to A_1 \wedge A_2}\ (\to \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, A_1, \Delta \to C \quad \Gamma, A_2, \Delta \to C}{\Gamma, A_1 \vee A_2, \Delta \to C}\ (\vee \to) \qquad \frac{\Pi \to A_i}{\Pi \to A_1 \vee A_2}\ (\to \vee)_i,\ \ i = 1, 2$$

Секвенциальные (генценовские) исчисления: $\mathbf{ACT}_\omega$ и $\mathbf{ACT}$

$\mathbf{ACT}_\omega$: логика *-непрерывных решёток Клини с делениями

$$\mathbf{MALC} + \qquad \frac{\left(\Gamma, A^n, \Delta \to C\right)_{n \in \omega}}{\Gamma, A^*, \Delta \to C}\ ({}^* \to)_\omega \qquad \frac{\Pi_1 \to A \quad \dots \quad \Pi_n \to A}{\Pi_1, \dots, \Pi_n \to A^*}\ (\to {}^*)_n,\ n \in \omega$$

$\mathbf{ACT}$: логика всех решёток Клини с делениями

$$\mathbf{MALC} + \qquad \frac{\Lambda \to B \quad A, B \to B}{A^* \to B}\ ({}^* \to)_{\mathrm{fp}} \quad \frac{}{\Lambda \to A^*}\ (\to {}^*)_0 \quad \frac{\Pi \to A \quad \Delta \to A^*}{\Pi, \Delta \to A^*}\ (\to {}^*)_{\mathrm{fp}}$$

Секвенциальные (генценовские) исчисления: $\mathbf{ACT}_\omega$ и **ACT**

$\mathbf{ACT}_\omega$: логика *-непрерывных решёток Клини с делениями

$$\mathbf{MALC} + \quad \frac{(\Gamma, A^n, \Delta \to C)_{n \in \omega}}{\Gamma, A^*, \Delta \to C}\ ({}^* \to)_\omega \qquad \frac{\Pi_1 \to A \quad \dots \quad \Pi_n \to A}{\Pi_1, \dots, \Pi_n \to A^*}\ (\to {}^*)_n,\ n \in \omega$$

ACT: логика всех решёток Клини с делениями

$$\mathbf{MALC} + \quad \frac{\Lambda \to B \quad A, B \to B}{A^* \to B}\ ({}^* \to)_{\mathrm{fp}} \quad \frac{}{\Lambda \to A^*}\ (\to {}^*)_0 \quad \frac{\Pi \to A \quad \Delta \to A^*}{\Pi, \Delta \to A^*}\ (\to {}^*)_{\mathrm{fp}}$$

Устранение сечения:

- в $\mathbf{ACT}_\omega$ (и, следовательно, в **MALC**) сечение устранимо [Е. Палька 2007];
- для **ACT** — открытый вопрос (в существующей формулировке не устраняется).

Результаты: алгоритмическая сложность

Результаты: алгоритмическая сложность

- **MALC**$(\backslash, /, \cdot)$: NP-полная [М. Пентус 2006]

Результаты: алгоритмическая сложность

- **MALC**$(\backslash, /, \cdot)$: NP-полная [М. Пентус 2006]
- **MALC**$(\backslash, /)$, **MALC**$(\backslash, \cdot)$: NP-полная [Ю. Саватеев 2008]
- **MALC**$(\backslash)$: полиномиальная [Ю. Саватеев 2007]

Результаты: алгоритмическая сложность

- **MALC**$(\backslash, /, \cdot)$: NP-полная [М. Пентус 2006]
- **MALC**$(\backslash, /)$, **MALC**$(\backslash, \cdot)$: NP-полная [Ю. Саватеев 2008]
- **MALC**$(\backslash)$: полиномиальная [Ю. Саватеев 2007]
- **MALC**$(\backslash, /, \cdot, \vee, \wedge)$: PSPACE-полная [М. Канович 1994]

Результаты: алгоритмическая сложность

- **MALC**$(\backslash, /, \cdot)$: NP-полная [М. Пентус 2006]
- **MALC**$(\backslash, /)$, **MALC**$(\backslash, \cdot)$: NP-полная [Ю. Саватеев 2008]
- **MALC**$(\backslash)$: полиномиальная [Ю. Саватеев 2007]
- **MALC**$(\backslash, /, \cdot, \vee, \wedge)$: PSPACE-полная [М. Канович 1994]
- **ACT**$_\omega$: Π^0_1-полная [В. Бушковский 2007]

Результаты: алгоритмическая сложность

- **MALC**$(\backslash, /, \cdot)$: NP-полная [М. Пентус 2006]
- **MALC**$(\backslash, /)$, **MALC**$(\backslash, \cdot)$: NP-полная [Ю. Саватеев 2008]
- **MALC**$(\backslash)$: полиномиальная [Ю. Саватеев 2007]
- **MALC**$(\backslash, /, \cdot, \vee, \wedge)$: PSPACE-полная [М. Канович 1994]
- **ACT**$_\omega$: Π_1^0-полная [В. Бушковский 2007]
- **ACT**$_\omega(\backslash, /, \cdot, {}^*)$: Π_1^0-полная [С. К. 2017–18]

Результаты: алгоритмическая сложность

- **MALC**$(\backslash, /, \cdot)$: NP-полная [М. Пентус 2006]
- **MALC**$(\backslash, /)$, **MALC**$(\backslash, \cdot)$: NP-полная [Ю. Саватеев 2008]
- **MALC**$(\backslash)$: полиномиальная [Ю. Саватеев 2007]
- **MALC**$(\backslash, /, \cdot, \vee, \wedge)$: PSPACE-полная [М. Канович 1994]
- **ACT**$_\omega$: Π^0_1-полная [В. Бушковский 2007]
- **ACT**$_\omega(\backslash, /, \cdot, {}^*)$: Π^0_1-полная [С. К. 2017–18]
- **ACT**: неразрешимая [С. К. 2018]

Результаты: полнота

Обозначения: L — модели на формальных языках, R — модели на бинарных отношениях

Результаты: полнота

Обозначения: L — модели на формальных языках, R — модели на бинарных отношениях

- **MALC**$(\backslash, /, \cdot, \wedge)$: R-полнота [Х. Андрека, С. Микулаш 1994]

Результаты: полнота

Обозначения: L — модели на формальных языках, R — модели на бинарных отношениях

- **MALC**$(\backslash, /, \cdot, \wedge)$: R-полнота [Х. Андрека, С. Микулаш 1994]
- **MALC**$(\backslash, /, \wedge)$: L-полнота [В. Бушковский 1982]

Результаты: полнота

Обозначения: L — модели на формальных языках, R — модели на бинарных отношениях

- **MALC**$(\backslash, /, \cdot, \wedge)$: R-полнота [Х. Андрека, С. Микулаш 1994]
- **MALC**$(\backslash, /, \wedge)$: L-полнота [В. Бушковский 1982]
- **MALC**$(\backslash, /, \cdot)$: L-полнота [М. Пентус 1995]

Результаты: полнота

Обозначения: L — модели на формальных языках, R — модели на бинарных отношениях

- **MALC**$(\backslash, /, \cdot, \wedge)$: R-полнота [Х. Андрека, С. Микулаш 1994]
- **MALC**$(\backslash, /, \wedge)$: L-полнота [В. Бушковский 1982]
- **MALC**$(\backslash, /, \cdot)$: L-полнота [М. Пентус 1995]
- **MALC**$(\backslash, \mathbf{1})$: R- и L-неполнота [фольклор]

Результаты: полнота

Обозначения: L — модели на формальных языках, R — модели на бинарных отношениях

- **MALC**$(\backslash, /, \cdot, \wedge)$: R-полнота [Х. Андрека, С. Микулаш 1994]
- **MALC**$(\backslash, /, \wedge)$: L-полнота [В. Бушковский 1982]
- **MALC**$(\backslash, /, \cdot)$: L-полнота [М. Пентус 1995]
- **MALC**$(\backslash, \mathbf{1})$: R- и L-неполнота [фольклор]
- **MALC**$(\backslash, /, \vee)$: R- и L-неполнота [С. К. 2018]

Результаты: полнота

Обозначения: L — модели на формальных языках, R — модели на бинарных отношениях

- **MALC**$(\backslash, /, \cdot, \wedge)$: R-полнота [Х. Андрека, С. Микулаш 1994]
- **MALC**$(\backslash, /, \wedge)$: L-полнота [В. Бушковский 1982]
- **MALC**$(\backslash, /, \cdot)$: L-полнота [М. Пентус 1995]
- **MALC**$(\backslash, \mathbf{1})$: R- и L-неполнота [фольклор]
- **MALC**$(\backslash, /, \vee)$: R- и L-неполнота [С. К. 2018]
- **ACT**$_\omega(\backslash, /, \cdot, \wedge, {}^*)$: R- и L-неполнота [С. К. 2018]

Результаты: полнота

Обозначения: L — модели на формальных языках, R — модели на бинарных отношениях

- **MALC**$(\backslash, /, \cdot, \wedge)$: R-полнота [Х. Андрека, С. Микулаш 1994]
- **MALC**$(\backslash, /, \wedge)$: L-полнота [В. Бушковский 1982]
- **MALC**$(\backslash, /, \cdot)$: L-полнота [М. Пентус 1995]
- **MALC**$(\backslash, \mathbf{1})$: R- и L-неполнота [фольклор]
- **MALC**$(\backslash, /, \vee)$: R- и L-неполнота [С. К. 2018]
- **ACT**$_\omega(\backslash, /, \cdot, \wedge, {}^*)$: R- и L-неполнота [С. К. 2018]
- **ACT**$_\omega(\backslash, /, \wedge, {}^*\backslash, /{}^*)$: L-полнота [Н. Рыжкова, С. К. 2015]

Результаты: полнота

Обозначения: L — модели на формальных языках, R — модели на бинарных отношениях

- **MALC**$(\backslash, /, \cdot, \wedge)$: R-полнота [Х. Андрека, С. Микулаш 1994]
- **MALC**$(\backslash, /, \wedge)$: L-полнота [В. Бушковский 1982]
- **MALC**$(\backslash, /, \cdot)$: L-полнота [М. Пентус 1995]
- **MALC**$(\backslash, \mathbf{1})$: R- и L-неполнота [фольклор]
- **MALC**$(\backslash, /, \vee)$: R- и L-неполнота [С. К. 2018]
- **ACT**$_\omega(\backslash, /, \cdot, \wedge, {}^*)$: R- и L-неполнота [С. К. 2018]
- **ACT**$_\omega(\backslash, /, \wedge, {}^*\backslash, /{}^*)$: L-полнота [Н. Рыжкова, С. К. 2015]
- **ACT**$_\omega(\backslash, /, \cdot, \wedge, {}^*\backslash, /{}^*)$: R-полнота [С. К. 2018]