# Закон дистрибутивности во фрагментах линейной и аффинной логик

Петербургский логический семинар, 14 апреля 2020 г.

С. Л. Кузнецов
(по совместной статье с М. И. Кановичем и А. О. Щедровым)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва

# Закон дистрибутивности

$$\mathscr{D} \quad = \quad ((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \longrightarrow (A \wedge B) \vee C$$

# Закон дистрибутивности

$$\mathscr{D} \quad = \quad ((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \longrightarrow (A \wedge B) \vee C$$

- Рассматриваем интуиционистскую логику **Int** и более слабые системы (линейную и аффинную логики).

# Закон дистрибутивности

$$\mathscr{D} \quad = \quad ((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \longrightarrow (A \wedge B) \vee C$$

- Рассматриваем интуиционистскую логику **Int** и более слабые системы (линейную и аффинную логики).
- Секвенциальная формулировка: секвенции имеют вид $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.

# Доказательство закона дистрибутивности в Int

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{A \vdash A}{A, B \vdash A}
        \qquad
        \dfrac{B \vdash B}{A, B \vdash B}
      }{A, B \vdash A \wedge B}
    }{A, B \vdash (A \wedge B) \vee C}
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{C \vdash C}{A, C \vdash C}
    }{A, C \vdash (A \wedge B) \vee C}
  }{A, B \vee C \vdash (A \wedge B) \vee C}
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{C \vdash C}{C, B \vee C \vdash C}
  }{C, B \vee C \vdash (A \wedge B) \vee C}
}{
  \dfrac{
    \dfrac{A \vee C, B \vee C \vdash (A \wedge B) \vee C}{(A \vee C) \wedge (B \vee C), (A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C}
  }{(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C}
}
$$

# Доказательство закона дистрибутивности в Int

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{A \vdash A}{A, B \vdash A}\;\mathbf{w}
        \qquad
        \dfrac{B \vdash B}{A, B \vdash B}\;\mathbf{w}
      }{A, B \vdash A \wedge B}
    }{A, B \vdash (A \wedge B) \vee C}
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{C \vdash C}{A, C \vdash C}\;\mathbf{w}
    }{A, C \vdash (A \wedge B) \vee C}
  }{A, B \vee C \vdash (A \wedge B) \vee C}
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{C \vdash C}{C, B \vee C \vdash C}\;\mathbf{w}
  }{C, B \vee C \vdash (A \wedge B) \vee C}
}{
  \dfrac{
    \dfrac{A \vee C, B \vee C \vdash (A \wedge B) \vee C}{(A \vee C) \wedge (B \vee C), (A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C}
  }{(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C}\;\mathbf{c}
}
$$

- Для доказательства нужны *структурные правила* сокращения (**c**) и ослабления (**w**).

# Доказательство закона дистрибутивности в Int

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{A \vdash A}{A, B \vdash A}\,\mathbf{w}
\quad
\dfrac{B \vdash B}{A, B \vdash B}\,\mathbf{w}
}{A, B \vdash A \wedge B}
}{A, B \vdash (A \wedge B) \vee C}
\quad
\dfrac{\dfrac{C \vdash C}{A, C \vdash C}\,\mathbf{w}}{A, C \vdash (A \wedge B) \vee C}
}{A, B \vee C \vdash (A \wedge B) \vee C}
\quad
\dfrac{\dfrac{C \vdash C}{C, B \vee C \vdash C}\,\mathbf{w}}{C, B \vee C \vdash (A \wedge B) \vee C}
}{A \vee C, B \vee C \vdash (A \wedge B) \vee C}
}{(A \vee C) \wedge (B \vee C), (A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C}
}{(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C}\,\mathbf{c}
$$

- Для доказательства нужны *структурные правила* сокращения (**c**) и ослабления (**w**).
- Правило перестановки (коммутативность) не нужно.

# Секвенциальные исчисления для субструктурных логик

**Аксиома:** $A \vdash A$

**Логические правила:**

$$\frac{A, \Pi \vdash B}{\Pi \vdash A \to B} \qquad \frac{\Pi \vdash A \quad \Gamma, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, \Pi, A \to B, \Delta \vdash C} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}$$

$$\frac{\Pi, A \vdash B}{\Pi \vdash B \leftarrow A} \qquad \frac{\Pi \vdash A \quad \Gamma, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B \leftarrow A, \Pi, \Delta \vdash C} \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, A \otimes B, \Delta \vdash C}$$

$$\frac{\Pi \vdash A \quad \Pi \vdash B}{\Pi \vdash A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash C}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash C} \qquad \frac{\Gamma, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash C}$$

$$\frac{\Pi \vdash A}{\Pi \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Pi \vdash B}{\Pi \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash C \quad \Gamma, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash C}$$

**Структурные правила:**

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}\ \mathbf{p} \qquad \frac{\Gamma, \Delta \vdash C}{\Gamma, A, \Delta \vdash C}\ \mathbf{w} \qquad \frac{\Gamma, A, A, \Delta \vdash C}{\Gamma, A, \Delta \vdash C}\ \mathbf{c}$$

# Секвенциальные исчисления для субструктурных логик

**Аксиома:** $A \vdash A$

**Сечение (cut):** $\dfrac{\Pi \vdash A \quad \Gamma, A, \Delta \vdash C}{\Gamma, \Pi, \Delta \vdash C}$

**Логические правила:**

$$\frac{A, \Pi \vdash B}{\Pi \vdash A \to B} \qquad \frac{\Pi \vdash A \quad \Gamma, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, \Pi, A \to B, \Delta \vdash C} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}$$

$$\frac{\Pi, A \vdash B}{\Pi \vdash B \leftarrow A} \qquad \frac{\Pi \vdash A \quad \Gamma, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B \leftarrow A, \Pi, \Delta \vdash C} \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, A \otimes B, \Delta \vdash C}$$

$$\frac{\Pi \vdash A \quad \Pi \vdash B}{\Pi \vdash A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash C}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash C} \qquad \frac{\Gamma, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash C}$$

$$\frac{\Pi \vdash A}{\Pi \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Pi \vdash B}{\Pi \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash C \quad \Gamma, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash C}$$

**Структурные правила:**

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}\ \mathbf{p} \qquad \frac{\Gamma, \Delta \vdash C}{\Gamma, A, \Delta \vdash C}\ \mathbf{w} \qquad \frac{\Gamma, A, A, \Delta \vdash C}{\Gamma, A, \Delta \vdash C}\ \mathbf{c}$$

# Субструктурные логики

- **MALC** — мультипликативно-аддитивное исчисление Ламбека (нет структурных правил);

# Субструктурные логики

- **MALC** — мультипликативно-аддитивное исчисление Ламбека (нет структурных правил);
- **ILL** = **MALC** + **p** — интуиционистская линейная логика (коммутативное **MALC**);

# Субструктурные логики

- **MALC** — мультипликативно-аддитивное исчисление Ламбека (нет структурных правил);
- **ILL** = **MALC** + **p** — интуиционистская линейная логика (коммутативное **MALC**);
- **IAL** = **ILL** + **w** — интуиционистская аффинная логика (нет сокращения);

# Субструктурные логики

- **MALC** — мультипликативно-аддитивное исчисление Ламбека (нет структурных правил);
- **ILL** = **MALC** + **p** — интуиционистская линейная логика (коммутативное **MALC**);
- **IAL** = **ILL** + **w** — интуиционистская аффинная логика (нет сокращения);
- **AMALC** = **MALC** + **w** — аффинное **MALC**;

# Субструктурные логики

- **MALC** — мультипликативно-аддитивное исчисление Ламбека (нет структурных правил);
- **ILL** = **MALC** + **p** — интуиционистская линейная логика (коммутативное **MALC**);
- **IAL** = **ILL** + **w** — интуиционистская аффинная логика (нет сокращения);
- **AMALC** = **MALC** + **w** — аффинное **MALC**;
- при отсутствии **w**, но в присутствии **c** и **p** возникает семейство релевантных логик;

# Субструктурные логики

- **MALC** — мультипликативно-аддитивное исчисление Ламбека (нет структурных правил);
- **ILL** = **MALC** + **p** — интуиционистская линейная логика (коммутативное **MALC**);
- **IAL** = **ILL** + **w** — интуиционистская аффинная логика (нет сокращения);
- **AMALC** = **MALC** + **w** — аффинное **MALC**;
- при отсутствии **w**, но в присутствии **c** и **p** возникает семейство релевантных логик;

# Субструктурные логики

- **MALC** — мультипликативно-аддитивное исчисление Ламбека (нет структурных правил);
- **ILL** = **MALC** + **p** — интуиционистская линейная логика (коммутативное **MALC**);
- **IAL** = **ILL** + **w** — интуиционистская аффинная логика (нет сокращения);
- **AMALC** = **MALC** + **w** — аффинное **MALC**;
- при отсутствии **w**, но в присутствии **c** и **p** возникает семейство релевантных логик;
- **Int** = **IAL** + **c** = **MALC** + **p** + **w** + **c**.

## Субструктурные логики: неформально

- В линейной и аффинной логиках формулы воспринимаются как *ресурсы*.

# Субструктурные логики: неформально

- В линейной и аффинной логиках формулы воспринимаются как *ресурсы*.
- Где нужно два рубля, не обойтись одним, поэтому $A, A \vdash B$ не влечёт $A \vdash B$.

# Субструктурные логики: неформально

- В линейной и аффинной логиках формулы воспринимаются как *ресурсы.*
- Где нужно два рубля, не обойтись одним, поэтому $A, A \vdash B$ не влечёт $A \vdash B$.
- Линейная логика, в отличие от аффинной, *экономна:* все ресурсы должны быть израсходованы.

# Субструктурные логики: неформально

- В линейной и аффинной логиках формулы воспринимаются как *ресурсы.*
- Где нужно два рубля, не обойтись одним, поэтому $A, A \vdash B$ не влечёт $A \vdash B$.
- Линейная логика, в отличие от аффинной, *экономна:* все ресурсы должны быть израсходованы.
- Поэтому в **ILL** мы не можем добавлять формулы в левую часть (ослаблять секвенцию).

# Субструктурные логики: неформально

- В линейной и аффинной логиках формулы воспринимаются как *ресурсы.*
- Где нужно два рубля, не обойтись одним, поэтому $A, A \vdash B$ не влечёт $A \vdash B$.
- Линейная логика, в отличие от аффинной, *экономна:* все ресурсы должны быть израсходованы.
- Поэтому в **ILL** мы не можем добавлять формулы в левую часть (ослаблять секвенцию).
- **MALC** и **AMALC** некоммутативны — важен порядок ресурсов:

# Субструктурные логики: неформально

- В линейной и аффинной логиках формулы воспринимаются как *ресурсы.*
- Где нужно два рубля, не обойтись одним, поэтому $A, A \vdash B$ не влечёт $A \vdash B$.
- Линейная логика, в отличие от аффинной, *экономна:* все ресурсы должны быть израсходованы.
- Поэтому в **ILL** мы не можем добавлять формулы в левую часть (ослаблять секвенцию).
- **MALC** и **AMALC** некоммутативны — важен порядок ресурсов:
    - логики вычислительных процессов ($\otimes$ — последовательное применение операций);

## Субструктурные логики: неформально

- В линейной и аффинной логиках формулы воспринимаются как *ресурсы.*
- Где нужно два рубля, не обойтись одним, поэтому $A, A \vdash B$ не влечёт $A \vdash B$.
- Линейная логика, в отличие от аффинной, *экономна:* все ресурсы должны быть израсходованы.
- Поэтому в **ILL** мы не можем добавлять формулы в левую часть (ослаблять секвенцию).
- **MALC** и **AMALC** некоммутативны — важен порядок ресурсов:
  - логики вычислительных процессов ($\otimes$ — последовательное применение операций);
  - категориальные грамматики Ламбека (описание синтаксиса естественных языков).

## Аддитивная и мультипликативная конъюнкции

- В субструктурных логиках (без правила сокращения) $A \otimes B$ (*мультипликативная* конъюнкция) и $A \wedge B$ (*аддитивная* конъюнкция) не эквивалентны.

# Аддитивная и мультипликативная конъюнкции

- В субструктурных логиках (без правила сокращения) $A \otimes B$ (*мультипликативная* конъюнкция) и $A \wedge B$ (*аддитивная* конъюнкция) не эквивалентны.
- $A \otimes B$: у нас *есть одновременно* ресурс $A$ и ресурс $B$.

## Аддитивная и мультипликативная конъюнкции

- В субструктурных логиках (без правила сокращения) $A \otimes B$ (*мультипликативная* конъюнкция) и $A \wedge B$ (*аддитивная* конъюнкция) не эквивалентны.
- $A \otimes B$: у нас *есть одновременно* ресурс $A$ и ресурс $B$.
- В некоммутативном случае — в правильной последовательности.

# Аддитивная и мультипликативная конъюнкции

- В субструктурных логиках (без правила сокращения) $A \otimes B$ (*мультипликативная* конъюнкция) и $A \wedge B$ (*аддитивная* конъюнкция) не эквивалентны.
- $A \otimes B$: у нас *есть одновременно* ресурс $A$ и ресурс $B$.
- В некоммутативном случае — в правильной последовательности.
- $A \wedge B$: у нас есть *один* ресурс, который может действовать и как $A$, и как $B$.

# Аддитивная и мультипликативная конъюнкции

- В субструктурных логиках (без правила сокращения) $A \otimes B$ (*мультипликативная* конъюнкция) и $A \wedge B$ (*аддитивная* конъюнкция) не эквивалентны.
- $A \otimes B$: у нас *есть одновременно* ресурс $A$ и ресурс $B$.
- В некоммутативном случае — в правильной последовательности.
- $A \wedge B$: у нас есть *один* ресурс, который может действовать и как $A$, и как $B$.
- Для $\wedge$ есть сокращение: $A \wedge A \equiv A$.

## Аддитивная и мультипликативная конъюнкции

- В субструктурных логиках (без правила сокращения) $A \otimes B$ (*мультипликативная* конъюнкция) и $A \wedge B$ (*аддитивная* конъюнкция) не эквивалентны.
- $A \otimes B$: у нас *есть одновременно* ресурс $A$ и ресурс $B$.
- В некоммутативном случае — в правильной последовательности.
- $A \wedge B$: у нас есть *один* ресурс, который может действовать и как $A$, и как $B$.
- Для $\wedge$ есть сокращение: $A \wedge A \equiv A$.
- Но в доказательстве закона дистрибутивности $\mathscr{D}$ нам нужно сокращение для секвенциальной запятой, т.е. для $\otimes$.

# Аддитивная и мультипликативная конъюнкции

- В субструктурных логиках (без правила сокращения) $A \otimes B$ (*мультипликативная* конъюнкция) и $A \wedge B$ (*аддитивная* конъюнкция) не эквивалентны.
- $A \otimes B$: у нас *есть одновременно* ресурс $A$ и ресурс $B$.
- В некоммутативном случае — в правильной последовательности.
- $A \wedge B$: у нас есть *один* ресурс, который может действовать и как $A$, и как $B$.
- Для $\wedge$ есть сокращение: $A \wedge A \equiv A$.
- Но в доказательстве закона дистрибутивности $\mathscr{D}$ нам нужно сокращение для секвенциальной запятой, т.е. для $\otimes$.
- Далее рассматриваем системы без $\otimes$: только $\to$, $\leftarrow$, $\wedge$, $\vee$.

# Дистрибутивность в логиках без сокращения

- Ono & Komori 1985: $\mathbf{IAL} \nvdash \mathscr{D}$.

## Дистрибутивность в логиках без сокращения

- Ono & Komori 1985: **IAL** $\nvdash \mathscr{D}$.
- Мы рассматриваем фрагменты, в которых оставлена только одна из аддитивных операций: $\vee$ или $\wedge$.

# Дистрибутивность в логиках без сокращения

- Ono & Komori 1985: **IAL** $\nvdash \mathscr{D}$.
- Мы рассматриваем фрагменты, в которых оставлена только одна из аддитивных операций: $\vee$ или $\wedge$.
- Оказывается, что эти операции ведут себя по-разному!

# Дистрибутивность в логиках без сокращения

- Ono & Komori 1985: **IAL** $\nvdash \mathscr{D}$.
- Мы рассматриваем фрагменты, в которых оставлена только одна из аддитивных операций: $\vee$ или $\wedge$.
- Оказывается, что эти операции ведут себя по-разному!
- Существует секвенция в языке $(\vee, \to, \leftarrow)$, доказуемая в **MALC** $+ \mathscr{D}$, но не доказуемая в **IAL**.

# Дистрибутивность в логиках без сокращения

- Ono & Komori 1985: **IAL** $\nvdash \mathscr{D}$.
- Мы рассматриваем фрагменты, в которых оставлена только одна из аддитивных операций: $\vee$ или $\wedge$.
- Оказывается, что эти операции ведут себя по-разному!
- Существует секвенция в языке $(\vee, \to, \leftarrow)$, доказуемая в **MALC** $+ \mathscr{D}$, но не доказуемая в **IAL**.
- Это нетривиальное следствие («след») дистрибутивности.

# Дистрибутивность в логиках без сокращения

- Ono & Komori 1985: $\mathbf{IAL} \nvdash \mathscr{D}$.
- Мы рассматриваем фрагменты, в которых оставлена только одна из аддитивных операций: $\vee$ или $\wedge$.
- Оказывается, что эти операции ведут себя по-разному!
- Существует секвенция в языке $(\vee, \to, \leftarrow)$, доказуемая в $\mathbf{MALC} + \mathscr{D}$, но не доказуемая в $\mathbf{IAL}$.
- Это нетривиальное следствие («след») дистрибутивности.
- Мы установим недоказуемость без $\mathscr{D}$ для самой сильной логики, а доказуемость с $\mathscr{D}$ — для самой слабой.

# Дистрибутивность в логиках без сокращения

- Ono & Komori 1985: **IAL** $\nvdash \mathscr{D}$.
- Мы рассматриваем фрагменты, в которых оставлена только одна из аддитивных операций: $\vee$ или $\wedge$.
- Оказывается, что эти операции ведут себя по-разному!
- Существует секвенция в языке $(\vee, \to, \leftarrow)$, доказуемая в **MALC** + $\mathscr{D}$, но не доказуемая в **IAL**.
- Это нетривиальное следствие («след») дистрибутивности.
- Мы установим недоказуемость без $\mathscr{D}$ для самой сильной логики, а доказуемость с $\mathscr{D}$ — для самой слабой.
- Таким образом, покроем весь интервал от **MALC** до **IAL**.

# Дистрибутивность в логиках без сокращения

- Ono & Komori 1985: **IAL** $\nvdash \mathscr{D}$.
- Мы рассматриваем фрагменты, в которых оставлена только одна из аддитивных операций: $\vee$ или $\wedge$.
- Оказывается, что эти операции ведут себя по-разному!
- Существует секвенция в языке $(\vee, \to, \leftarrow)$, доказуемая в **MALC** + $\mathscr{D}$, но не доказуемая в **IAL**.
- Это нетривиальное следствие («след») дистрибутивности.
- Мы установим недоказуемость без $\mathscr{D}$ для самой сильной логики, а доказуемость с $\mathscr{D}$ — для самой слабой.
- Таким образом, покроем весь интервал от **MALC** до **IAL**.
- В языке $(\wedge, \to, \leftarrow)$ такой секвенции не существует (ни для одной из логик).

# «След» дистрибутивности в языке $(\vee, \longrightarrow, \longleftarrow)$

**Теорема**

*Секвенция*

$$((x \leftarrow y) \vee w) \leftarrow ((x \leftarrow y) \vee (x \leftarrow z) \vee w), (x \leftarrow y) \vee w,$$
$$((x \leftarrow y) \vee w) \rightarrow ((x \leftarrow z) \vee w) \vdash (x \leftarrow (y \vee z)) \vee w$$

*доказуема в* **MALC** $+ \mathscr{D}$, *но не доказуема в* **IAL**.

# «След» дистрибутивности в языке $(\vee, \to, \leftarrow)$

**Теорема**

*Секвенция*

$$((x \leftarrow y) \vee w) \leftarrow ((x \leftarrow y) \vee (x \leftarrow z) \vee w), (x \leftarrow y) \vee w,$$
$$((x \leftarrow y) \vee w) \to ((x \leftarrow z) \vee w) \vdash (x \leftarrow (y \vee z)) \vee w$$

*доказуема в* **MALC** $+ \mathscr{D}$, *но не доказуема в* **IAL**.

- Положим $A = (x \leftarrow y) \vee w$ и $B = (x \leftarrow z) \vee w$.

**Теорема**

*Секвенция*

$$((x \leftarrow y) \vee w) \leftarrow ((x \leftarrow y) \vee (x \leftarrow z) \vee w), (x \leftarrow y) \vee w,$$
$$((x \leftarrow y) \vee w) \to ((x \leftarrow z) \vee w) \vdash (x \leftarrow (y \vee z)) \vee w$$

*доказуема в* **MALC** $+ \mathcal{D}$*, но не доказуема в* **IAL***.*

- Положим $A = (x \leftarrow y) \vee w$ и $B = (x \leftarrow z) \vee w$.
- $A \leftarrow (A \vee B), A, A \to B \vdash A \wedge B$

# «След» дистрибутивности в языке $(\vee, \to, \leftarrow)$

**Теорема**

*Секвенция*

$$((x \leftarrow y) \vee w) \leftarrow ((x \leftarrow y) \vee (x \leftarrow z) \vee w), (x \leftarrow y) \vee w,$$
$$((x \leftarrow y) \vee w) \to ((x \leftarrow z) \vee w) \vdash (x \leftarrow (y \vee z)) \vee w$$

*доказуема в* **MALC** + $\mathscr{D}$, *но не доказуема в* **IAL**.

- Положим $A = (x \leftarrow y) \vee w$ и $B = (x \leftarrow z) \vee w$.
- $A \leftarrow (A \vee B), A, A \to B \vdash A \wedge B$
- Правая часть: $((x \leftarrow y) \vee w) \wedge ((x \leftarrow z) \vee w) \overset{\mathscr{D}}{\vdash}$
  $\vdash ((x \leftarrow y) \wedge (x \leftarrow z)) \vee w \equiv (x \leftarrow (y \vee z)) \vee w.$

# «След» дистрибутивности в языке $(\vee, \rightarrow, \leftarrow)$

**Теорема**

*Секвенция*

$$((x \leftarrow y) \vee w) \leftarrow ((x \leftarrow y) \vee (x \leftarrow z) \vee w), (x \leftarrow y) \vee w,$$
$$((x \leftarrow y) \vee w) \rightarrow ((x \leftarrow z) \vee w) \vdash (x \leftarrow (y \vee z)) \vee w$$

*доказуема в* **MALC** $+ \mathscr{D}$, *но не доказуема в* **IAL**.

- Положим $A = (x \leftarrow y) \vee w$ и $B = (x \leftarrow z) \vee w$.
- $A \leftarrow (A \vee B), A, A \rightarrow B \vdash A \wedge B$
- Правая часть: $((x \leftarrow y) \vee w) \wedge ((x \leftarrow z) \vee w) \overset{\mathscr{D}}{\vdash}$
  $\vdash ((x \leftarrow y) \wedge (x \leftarrow z)) \vee w \equiv (x \leftarrow (y \vee z)) \vee w$.
- Недоказуемость в **IAL** проверяется явно (поиском вывода).

## «След» дистрибутивности в языке $(\vee, \to, \leftarrow)$

**Теорема**

*Секвенция*

$$((x \leftarrow y) \vee w) \leftarrow ((x \leftarrow y) \vee (x \leftarrow z) \vee w), (x \leftarrow y) \vee w,$$
$$((x \leftarrow y) \vee w) \to ((x \leftarrow z) \vee w) \vdash (x \leftarrow (y \vee z)) \vee w$$

*доказуема в* **MALC** $+ \mathscr{D}$, *но не доказуема в* **IAL**.

- Положим $A = (x \leftarrow y) \vee w$ и $B = (x \leftarrow z) \vee w$.
- $A \leftarrow (A \vee B), A, A \to B \vdash A \wedge B$
- Правая часть: $((x \leftarrow y) \vee w) \wedge ((x \leftarrow z) \vee w) \overset{\mathscr{D}}{\vdash}$
  $\vdash ((x \leftarrow y) \wedge (x \leftarrow z)) \vee w \equiv (x \leftarrow (y \vee z)) \vee w$.
- Недоказуемость в **IAL** проверяется явно (поиском вывода).
- Использовали аффинную версию `llprover` (Tamura 1998).

# «След» дистрибутивности в языке $(\vee, \to, \leftarrow)$

- Для доказательства недоказуемости нашей секвенции в **ILL** можно воспользоваться алгебраической контрмоделью: $R = \{0, a, b, c, 1\}$; порядок: $0 \prec a, b, c \prec 1$; $a, b, c$ несравнимы.

| $\cdot$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ | $1$ |
| $b$ | $0$ | $b$ | $a$ | $c$ | $1$ |
| $c$ | $0$ | $c$ | $c$ | $0$ | $c$ |
| $1$ | $0$ | $1$ | $1$ | $c$ | $1$ |

| $\to$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $a$ | $0$ | $a$ | $b$ | $c$ | $1$ |
| $b$ | $0$ | $b$ | $a$ | $c$ | $1$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ | $1$ | $1$ |
| $1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $c$ | $1$ |

Переменные интерпретируются так: $y$ как $b$, $z$ как $c$, $x$ и $w$ — обе как $a$.

## «След» дистрибутивности в языке $(\vee, \to, \leftarrow)$

- Эту контрмодель предложил нам один из рецензентов WoLLIC 2019.

- Эту контрмодель предложил нам один из рецензентов WoLLIC 2019.
- К сожалению, эта контрмодель не аффинная: $a \cdot b = b \not\preceq a$.

## «След» дистрибутивности в языке $(\vee, \to, \leftarrow)$

- Эту контрмодель предложил нам один из рецензентов WoLLIC 2019.
- К сожалению, эта контрмодель не аффинная: $a \cdot b = b \not\preceq a$.
- Пришлось идти синтаксическим путём.

# Дистрибутивность и фрагмент $(\wedge, \to, \leftarrow)$

**Теорема**

*Секвенция в языке* $(\wedge, \to, \leftarrow)$ *доказуема в* **MALC** *тогда и только тогда, когда она доказуема в* **MALC** $+ \mathscr{D}$. *Аналогично для* **ILL**, **AMALC**, **IAL**.

# Дистрибутивность и фрагмент $(\wedge, \to, \leftarrow)$

**Теорема**

*Секвенция в языке* $(\wedge, \to, \leftarrow)$ *доказуема в* **MALC** *тогда и только тогда, когда она доказуема в* **MALC** $+ \mathscr{D}$. *Аналогично для* **ILL**, **AMALC**, **IAL**.

- Дистрибутивность во фрагменте $(\wedge, \to, \leftarrow)$ проходит бессимптомно.

# Дистрибутивность и фрагмент $(\wedge, \to, \leftarrow)$

**Теорема**

*Секвенция в языке $(\wedge, \to, \leftarrow)$ доказуема в* **MALC** *тогда и только тогда, когда она доказуема в* **MALC** $+ \mathscr{D}$. *Аналогично для* **ILL**, **AMALC**, **IAL**.

- Дистрибутивность во фрагменте $(\wedge, \to, \leftarrow)$ проходит бессимптомно.
- Доказательство основано на *языковой семантике* исчисления Ламбека и её модификациях.

- Операции на формальных языках:

$$M \cdot N = \{uv \mid u \in M, v \in N\};$$
$$M \setminus N = \{u \in \Sigma^* \mid (\forall v \in M)\, vu \in N\};$$
$$N \,/\, M = \{u \in \Sigma^* \mid (\forall v \in M)\, uv \in N\}.$$

# Языковые модели исчисления Ламбека

- Операции на формальных языках:

$$M \cdot N = \{uv \mid u \in M, v \in N\};$$

$$M \setminus N = \{u \in \Sigma^* \mid (\forall v \in M)\, vu \in N\};$$

$$N / M = \{u \in \Sigma^* \mid (\forall v \in M)\, uv \in N\}.$$

- $w(A \longrightarrow B) = w(A) \setminus w(B)$; $w(B \longleftarrow A) = w(B) / w(A)$; $w(A \wedge B) = w(A) \cap w(B)$.

# Языковые модели исчисления Ламбека

- Операции на формальных языках:

$$M \cdot N = \{uv \mid u \in M, v \in N\};$$
$$M \Big\backslash N = \{u \in \Sigma^* \mid (\forall v \in M)\, vu \in N\};$$
$$N \Big/ M = \{u \in \Sigma^* \mid (\forall v \in M)\, uv \in N\}.$$

- $w(A \longrightarrow B) = w(A) \Big\backslash w(B)$; $w(B \longleftarrow A) = w(B) \Big/ w(A)$; $w(A \wedge B) = w(A) \cap w(B)$.
- Секвенция $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ истинна, если $w(A_1) \cdot \ldots \cdot w(A_n) \subseteq w(B)$.

# Языковые модели исчисления Ламбека

- Операции на формальных языках:

$$M \cdot N = \{uv \mid u \in M, v \in N\};$$

$$M \setminus N = \{u \in \Sigma^* \mid (\forall v \in M)\, vu \in N\};$$

$$N \,/\, M = \{u \in \Sigma^* \mid (\forall v \in M)\, uv \in N\}.$$

- $w(A \longrightarrow B) = w(A) \setminus w(B)$; $w(B \longleftarrow A) = w(B) \,/\, w(A)$; $w(A \wedge B) = w(A) \cap w(B)$.
- Секвенция $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ истинна, если $w(A_1) \cdot \ldots \cdot w(A_n) \subseteq w(B)$.
- Секвенция $\vdash B$ истинна, если $w(B)$ содержит пустое слово.

# Языковые модели исчисления Ламбека

- Операции на формальных языках:

$$M \cdot N = \{uv \mid u \in M, v \in N\};$$

$$M \setminus N = \{u \in \Sigma^* \mid (\forall v \in M)\, vu \in N\};$$

$$N \,/\, M = \{u \in \Sigma^* \mid (\forall v \in M)\, uv \in N\}.$$

- $w(A \longrightarrow B) = w(A) \setminus w(B)$; $w(B \longleftarrow A) = w(B) \,/\, w(A)$; $w(A \wedge B) = w(A) \cap w(B)$.
- Секвенция $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ истинна, если $w(A_1) \cdot \ldots \cdot w(A_n) \subseteq w(B)$.
- Секвенция $\vdash B$ истинна, если $w(B)$ содержит пустое слово.
- **Корректность:** если секвенция в языке $(\wedge, \longrightarrow, \longleftarrow)$ доказуема в **MALC**, то она истинна во всех языковых моделях.

# Языковые модели исчисления Ламбека

- Операции на формальных языках:

$$M \cdot N = \{uv \mid u \in M, v \in N\};$$
$$M \mathbin{\Big\backslash} N = \{u \in \Sigma^* \mid (\forall v \in M)\, vu \in N\};$$
$$N \mathbin{\Big/} M = \{u \in \Sigma^* \mid (\forall v \in M)\, uv \in N\}.$$

- $w(A \longrightarrow B) = w(A) \mathbin{\Big\backslash} w(B)$; $w(B \longleftarrow A) = w(B) \mathbin{\Big/} w(A)$; $w(A \wedge B) = w(A) \cap w(B)$.
- Секвенция $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ истинна, если $w(A_1) \cdot \ldots \cdot w(A_n) \subseteq w(B)$.
- Секвенция $\vdash B$ истинна, если $w(B)$ содержит пустое слово.
- **Корректность:** если секвенция в языке $(\wedge, \longrightarrow, \longleftarrow)$ доказуема в **MALC**, то она истинна во всех языковых моделях.
- Корректность сохраняется и для $\vee$, $w(A \vee B) = w(A) \cup w(B)$.

# Языковые модели исчисления Ламбека

- **Полнота** (Buszkowski 1982): если секвенция в языке $(\wedge, \to, \leftarrow)$ истинна во всех языковых моделях, то она доказуема в **MALC**.

# Языковые модели исчисления Ламбека

- **Полнота** (Buszkowski 1982): если секвенция в языке $(\wedge, \to, \leftarrow)$ истинна во всех языковых моделях, то она доказуема в **MALC**.
- Конструкция канонической модели: $\Sigma = \mathrm{Fm}_{(\wedge,\to,\leftarrow)}$,

$$w_0(A) = \{\Gamma \mid \Gamma \vdash A \text{ доказуема в } \mathbf{MALC}\}.$$

# Языковые модели исчисления Ламбека

- **Полнота** (Buszkowski 1982): если секвенция в языке $(\wedge, \to, \leftarrow)$ истинна во всех языковых моделях, то она доказуема в **MALC**.
- Конструкция канонической модели: $\Sigma = \mathrm{Fm}_{(\wedge,\to,\leftarrow)}$,

$$w_0(A) = \{\Gamma \mid \Gamma \vdash A \text{ доказуема в } \mathbf{MALC}\}.$$

- Секвенция доказуема тогда и только тогда, когда она истинна в канонической модели.

# Языковые модели исчисления Ламбека

- **Полнота** (Buszkowski 1982): если секвенция в языке $(\wedge, \to, \leftarrow)$ истинна во всех языковых моделях, то она доказуема в **MALC**.
- Конструкция канонической модели: $\Sigma = \mathrm{Fm}_{(\wedge, \to, \leftarrow)}$,

$$w_0(A) = \{\Gamma \mid \Gamma \vdash A \text{ доказуема в } \mathbf{MALC}\}.$$

- Секвенция доказуема тогда и только тогда, когда она истинна в канонической модели.
- *Языковые модели дистрибутивны.*

# Языковые модели исчисления Ламбека

- **Полнота** (Buszkowski 1982): если секвенция в языке $(\wedge, \to, \leftarrow)$ истинна во всех языковых моделях, то она доказуема в **MALC**.
- Конструкция канонической модели: $\Sigma = \mathrm{Fm}_{(\wedge,\to,\leftarrow)}$,

$$w_0(A) = \{\Gamma \mid \Gamma \vdash A \text{ доказуема в } \mathbf{MALC}\}.$$

- Секвенция доказуема тогда и только тогда, когда она истинна в канонической модели.
- *Языковые модели дистрибутивны.*
- Если секвенция в языке $(\wedge, \to, \leftarrow)$ доказуема в $\mathbf{MALC} + \mathscr{D}$, то она истинна во всех языковых моделях, а следовательно доказуема в **MALC**.

# Языковые модели расширений исчисления Ламбека

- Теоремы о корректности и полноте в языке $(\wedge, \to, \leftarrow)$ переносятся на исчисления со структурными правилами, при соответствующих условиях на языки в модели.

# Языковые модели расширений исчисления Ламбека

- Теоремы о корректности и полноте в языке $(\wedge, \to, \leftarrow)$ переносятся на исчисления со структурными правилами, при соответствующих условиях на языки в модели.

| | |
|---|---|
| **ILL** | коммутативность: $a_1 \dots a_n \in M \Longrightarrow a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n)} \in M$ |
| **AMALC** | монотонность: $uv \in M \Longrightarrow uwv \in M$ |
| **IAL** | коммутативность и монотонность |

# Языковые модели расширений исчисления Ламбека

- Теоремы о корректности и полноте в языке $(\wedge, \to, \leftarrow)$ переносятся на исчисления со структурными правилами, при соответствующих условиях на языки в модели.

| | |
|---|---|
| **ILL** | коммутативность: $a_1 \ldots a_n \in M \Longrightarrow a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(n)} \in M$ |
| **AMALC** | монотонность: $uv \in M \Longrightarrow uwv \in M$ |
| **IAL** | коммутативность и монотонность |

- Доказательство полноты — также методом канонической модели.

# Языковые модели расширений исчисления Ламбека

- Теоремы о корректности и полноте в языке $(\wedge, \to, \leftarrow)$ переносятся на исчисления со структурными правилами, при соответствующих условиях на языки в модели.

| | |
|---|---|
| **ILL** | коммутативность: $a_1 \dots a_n \in M \Longrightarrow a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n)} \in M$ |
| **AMALC** | монотонность: $uv \in M \Longrightarrow uwv \in M$ |
| **IAL** | коммутативность и монотонность |

- Доказательство полноты — также методом канонической модели.
- Следовательно, **ILL**, **AMALC** и **IAL** во фрагменте $(\wedge, \to, \leftarrow)$ тоже «нечувствительны» к дистрибутивности.

# Заключительные замечания

- Для **MALC** + $\mathscr{D}$ существует гиперсеквенциальная система с устранимым сечением (Kozak 2009).

## Заключительные замечания

- Для **MALC** + $\mathscr{D}$ существует гиперсеквенциальная система с устранимым сечением (Kozak 2009).
- Используя эту систему, можно аксиоматизировать фрагмент **MALC** + $\mathscr{D}$ в языке $(\vee, \longrightarrow, \longleftarrow)$.

## Заключительные замечания

- Для **MALC** + $\mathscr{D}$ существует гиперсеквенциальная система с устранимым сечением (Kozak 2009).
- Используя эту систему, можно аксиоматизировать фрагмент **MALC** + $\mathscr{D}$ в языке $(\vee, \rightarrow, \leftarrow)$.
- Неизвестно, даст ли полную аксиоматику добавление нашей формулы-примера (вряд ли).

# Заключительные замечания

- Для **MALC** + $\mathscr{D}$ существует гиперсеквенциальная система с устранимым сечением (Kozak 2009).
- Используя эту систему, можно аксиоматизировать фрагмент **MALC** + $\mathscr{D}$ в языке $(\vee, \to, \leftarrow)$.
- Неизвестно, даст ли полную аксиоматику добавление нашей формулы-примера (вряд ли).
- Отдельная открытая задача — случай **MALC** + **p** + **c** (релевантные логики).

# Заключительные замечания

- Для **MALC** + $\mathscr{D}$ существует гиперсеквенциальная система с устранимым сечением (Kozak 2009).
- Используя эту систему, можно аксиоматизировать фрагмент **MALC** + $\mathscr{D}$ в языке $(\vee, \rightarrow, \leftarrow)$.
- Неизвестно, даст ли полную аксиоматику добавление нашей формулы-примера (вряд ли).
- Отдельная открытая задача — случай **MALC** + **p** + **c** (релевантные логики).
- Традиционно $\mathscr{D}$ входит в аксиоматику релевантных логик, для нас интересны слабые системы без $\mathscr{D}$.

**Спасибо!**