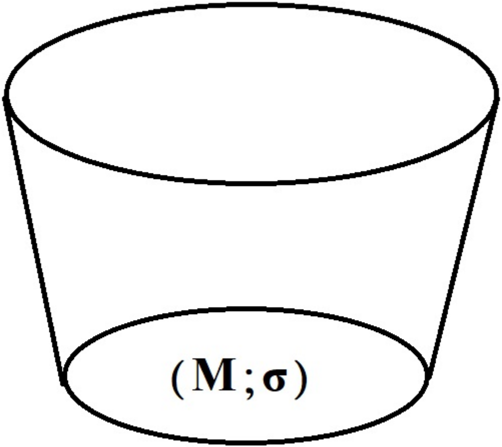
О Σ–определимых структурах в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$

А.С. Морозов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

morozov@math.nsc.ru

Общий вид моделей KPU:



KPU: сигнатура

Предполагаем, что имеется исходная конечная предикатная сигнатура $\sigma = \left\langle P_i^{n_i} \right\rangle_{i<k}$ (сигнатура структуры праэлементов).

Сигнатура KPU: $\sigma \cup \left\langle \in; U^1, \ldots \right\rangle$

- U: выделяет 'праэлементы': элементы, не равные $\varnothing$, и не содержащие других элементов, т.е. элементы базовой структуры (дно)
- $\in$: отношение принадлежности; элементы из U не содержат никаких элементов

KPU: аксиомы

- Любой $P_i \in \sigma$ может быть истинным только на праэлементах
- Любой праэлемент не содержит никаких элементов
- Экстенсиональность:
  $\forall x \forall y \big(\neg U(x) \wedge \neg U(y) \to (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)\big)$
- Аксиома фундирования (по всем формулам)
- Аксиома пары
- Аксиома объединения
- Аксиома Δ_0–выделения $\forall a \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x))$, где φ — произвольная Δ_0–формула (определим ниже)
- Аксиома Δ_0–выборки
  $\forall x \in a \exists y \varphi(x, y) \to \exists b \forall x \in a \exists y \in b\, \varphi(x, y)$,
  где φ — произвольная Δ_0–формула (определим ниже)

Δ_0– и Σ–формулы

Класс Δ_0–формул: наименьший класс формул, содержащий все атомарные формулы и замкнутый относительно пропозициональных связок $\wedge, \vee, \neg$ и ограниченных квантификаций $\exists x \in y$ и $\forall x \in y$

Класс Σ–формул: наименьший класс формул, содержащий все Δ_0–формулы и замкнутый относительно $\wedge$, $\vee$ (позитивных связок), ограниченных квантификаций $\exists x \in y$ и $\forall x \in y$ и неограниченных экзистенциональных квантификаций $\exists x$.

KPU: ‘вычислимая перечислимость’

Определимость с помощью Δ_0–формул: некоторая ‘начальная вычислимость’, ‘примитивная рекурсивность’

Теорема (Принцип Σ–рефлексии)

Для любой Σ–формулы φ существует Δ_0–формула φ^* такая, что $KPU \vdash \varphi \leftrightarrow \exists u \varphi^*$.

Определимость Σ–формулами с параметрами $\sim$ вычислимая перечислимость.

$\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$: наследственно конечные надстройки, простейшие модели KPU

$$
\begin{aligned}
HF_0(\mathfrak{M}) &= |\mathfrak{M}| \\
HF_{n+1}(\mathfrak{M}) &= HF_n(\mathfrak{M}) \cup S_{<\omega}(HF_n(\mathfrak{M})) \\
HF(\mathfrak{M}) &= \bigcup_{n<\omega} HF_n(\mathfrak{M})
\end{aligned}
$$

$HF(\mathfrak{M})$: все элементы из $\mathfrak{M}$ и все множества, которые можно явно выписать, используя $\{$, $\}$, $\varnothing$, “**,**”, а также элементы из $\mathfrak{M}$.

Некоторые аналогии

Σ–Определимость над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$: “вычислимая перечислимость” в языке программирования высокого уровня, в котором мы располагаем **точной** реализацией поля $\mathbb{R}$ вещественных чисел, и можем вычислять и использовать в дальнейших вычислениях корни полиномов по данным их коэффициентам.

Σ–определимость над $\mathbb{HF}(\mathbb{R}) \to$ ‘вычислимость’ для функций и для множеств (используем теорему о графике и теорему Поста)

“Тезис Чёрча” для $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$

Функция над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ интуитивно вычислима с использованием операций над $\mathbb{R}$ и нахождением корней полиномов тогда и только тогда, когда её график Σ–определим.

Некоторые аналогии

Σ–Определимость над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$: "вычислимая перечислимость" в языке программирования высокого уровня, в котором мы располагаем **точной** реализацией поля $\mathbb{R}$ вещественных чисел, и можем вычислять и использовать в дальнейших вычислениях корни полиномов по данным их коэффициентам.

Σ–определимость над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ $\to$ 'вычислимость' для функций и для множеств (используем теорему о графике и теорему Поста)

"Тезис Чёрча" для $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$

Функция над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ интуитивно вычислима с использованием операций над $\mathbb{R}$ и нахождением корней полиномов тогда и только тогда, когда её график Σ–определим.

- Jon Barwise, Admissible Sets and Structures: An Approach to Definability Theory (Berlin: Springer–Verlag, 1975)
- Ершов, Ю.Л., Определимость и вычислимость, Серия: Сибирская школа алгебры и логики, Новосибирск: Научная книга, 1996 г. (переизд. 2000 г.)

Определение Σ–представимых структур

Σ–Представимые структуры: аналог понятия вычислимых структур при замене понятия вычислимой перечислимости на Σ–определимость

Представление алгебраической структуры $\mathfrak{M}$ конечной предикатной сигнатуры над $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ — это любое кодирование её элементов с помощью элементов из некоторого $A \subseteq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, т.е. произвольное отображение $\nu : A \subseteq \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \xrightarrow{onto} |\mathfrak{M}|$.

- Если ν взаимно однозначно, то ν называется *простым*.
- Если диаграмма $D(\mathfrak{M}, \nu)$ Σ–определима с параметрами из $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, то ν называется *Σ–представлением* $\mathfrak{M}$ над $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.
- Если позитивная диаграмма $D^+(\mathfrak{M}, \nu)$ Σ–определима с параметрами в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, то ν называется *позитивным Σ–представлением* $\mathfrak{M}$ над $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Определение Σ–представимых структур

Σ–Представимые структуры: аналог понятия вычислимых структур при замене понятия вычислимой перечислимости на Σ–определимость

Представление алгебраической структуры $\mathfrak{M}$ конечной предикатной сигнатуры над $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ — это любое кодирование её элементов с помощью элементов из некоторого $A \subseteq \mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, т.е. произвольное отображение $\nu : A \subseteq \mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \xrightarrow{onto} |\mathfrak{M}|$.

- Если ν взаимно однозначно, то ν называется *простым*.
- Если диаграмма $D(\mathfrak{M}, \nu)$ Σ–определима с параметрами из $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, то ν называется *Σ–представлением* $\mathfrak{M}$ над $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$.
- Если позитивная диаграмма $D^+(\mathfrak{M}, \nu)$ Σ–определима с параметрами в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, то ν называется *позитивным Σ–представлением* $\mathfrak{M}$ над $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$.

Определение Σ–представимых структур

Σ–Представимые структуры: аналог понятия вычислимых структур при замене понятия вычислимой перечислимости на Σ–определимость

Представление алгебраической структуры $\mathfrak{M}$ конечной предикатной сигнатуры над $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ — это любое кодирование её элементов с помощью элементов из некоторого $A \subseteq \mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, т.е. произвольное отображение $\nu : A \subseteq \mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \xrightarrow{onto} |\mathfrak{M}|$.

- Если ν взаимно однозначно, то ν называется *простым*.
- Если диаграмма $D(\mathfrak{M}, \nu)$ Σ–определима с параметрами из $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, то ν называется Σ–*представлением* $\mathfrak{M}$ над $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$.
- Если позитивная диаграмма $D^+(\mathfrak{M}, \nu)$ Σ–определима с параметрами в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, то ν называется *позитивным* Σ–*представлением* $\mathfrak{M}$ над $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$.

Некоторые серии вопросов о вычислимых структурах

- Существование вычислимых представлений
- Число не вычислимо изоморфных вычислимых представлений для конкретных структур
- Наличие вычислимых параметризаций для классов структур

Соглашение: Σ–представление над $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ = Σ–представление над $\mathfrak{N}$.

Теорема

1. *Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ имеет простое Σ–представление над $\mathbb{R}$.*
2. *Если поле K имеет (простое) Σ–представление над $\mathbb{R}$, то и $K[x]$ также имеет (простое) Σ–представление над $\mathbb{R}$.*

Теорема (Ю.Л. Ершов, 1985, 1995)

- *$\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ не имеют Σ–представлений в $\mathbb{HF}(S)$, где S — бесконечное множество.*
- *$\mathbb{C}$ имеет Σ–представлание над любым плотным линейным порядком мощности 2^ω.*
- *$\mathbb{R}$ не имеет Σ–представлений над такими надстройками.*

Теорема (М. и М.В. Коровина, 2008)

- *Если не более, чем счётная структура имеет Σ–представление над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ без параметров такое, что каждый её элемент имеет не более, чем счётное количество кодов, то эта структура имеет вычислимую изоморфную копию.*
- *При отсутствии ограничения на мощности множества кодов элементов, Σ–представимые структуры могут иметь сколь угодно высокую гиперарифметическую сложность (всё ещё без параметров!).*
- *Если счётная структура имеет Σ–представление над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$, то она имеет и гиперарифметическую изоморфную копию.*
- *Любая не более чем счётная структура имеет Σ–представление над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ с максимум одним параметром.*

Представления $\mathbb{R}$ над $\mathbb{R}$

Теорема (М.В. Коровина, 1990)

Функция $x \mapsto e^x$ не выразима Σ–формулой с параметрами в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$.

Теорема (М.)

Структура $\langle R; <, \exp\rangle$ имеет Σ–представление над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$.

Можно ли 'улучшить' $\mathbb{R}$, пользуясь только $\mathbb{R}$, т.е. построить такую Σ–представимую изоморфную копию $\mathbb{R}$ над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$, что, например, экспонента в ней уже будет Σ–определима?

Единственность представления $\mathbb{R}$ над $\mathbb{R}$

Теорема (М. 2012)

Предположим, что $\bar{p}$ — кортеж параметров из $\mathbb{R}$ и

1. *множества $\widetilde{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}$ и $<^* \subseteq \widetilde{\mathbb{R}} \times \widetilde{\mathbb{R}}$ Σ–определимы в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ с параметрами $\bar{p}$*
2. *$+^*, \times^* : \widetilde{\mathbb{R}}^2 \to \widetilde{\mathbb{R}}$ — Σ–определимые операции в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ с параметрами $\bar{p}$*
3. *γ — изоморфизм из $\left\langle \widetilde{\mathbb{R}}; +^*, \times^*, <^* \right\rangle$ на $\langle \mathbb{R}; +, \times, < \rangle$.*

Тогда отображение γ Σ–определимо над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ с параметрами $\bar{p}$.

Так что, используя в качестве основного множества только $\mathbb{R}$, ‘улучшить’ $\mathbb{R}$ невозможно!

Следствие

Пусть f — одна из функций exp, ln, sin, cos. *Не существует такого кортежа параметров* $\bar{p}$ *из* R *и* Σ*–определимых над* $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ *с параметрами* $\bar{p}$ *подмножеств* $\widetilde{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}$ *и* $<^* \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}^2$ *и* Σ*–операций* $+^*, \times^*, e^* : \widetilde{\mathbb{R}} \to \widetilde{\mathbb{R}}$, *что структуры* $\left\langle \widetilde{\mathbb{R}}; +^*, \times^*, e^*, <^* \right\rangle$ *и* $\langle \mathbb{R}; +, \times, f, < \rangle$ *изоморфны.*

Представления для $\langle\mathbb{R}; \leqslant\rangle$

Теорема (М. 2014)

В $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ существует 2^ω попарно не Σ–изоморфных Σ–представления для структуры $\langle\mathbb{R}; \leqslant\rangle$.

В теории вычислимых моделей, структура, не изоморфная данной структуре либо никакой из счётного семейства структур, как правило строится пошаговой конструкцией методом диагонализации (методом приоритета), удовлетворением счётного числа требований типа 'n–й алгоритм не является изоморфизмом'. В нашем случае число требований несчётно, и не вполне понятно, можно ли вообще использовать пошаговые конструкции. Доказательство использует топологические идеи.

Представления для $\langle \mathbb{R}; \leqslant \rangle$

Теорема (М. 2014)

В $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ существует 2^ω попарно не Σ–изоморфных Σ–представления для структуры $\langle \mathbb{R}; \leqslant \rangle$.

В теории вычислимых моделей, структура, не изоморфная данной структуре либо никакой из счётного семейства структур, как правило строится пошаговой конструкцией методом диагонализации (методом приоритета), удовлетворением счётного числа требований типа 'n–й алгоритм не является изоморфизмом'. В нашем случае число требований несчётно, и не вполне понятно, можно ли вообще использовать пошаговые конструкции. Доказательство использует топологические идеи.

Σ–жёсткие порядки

Теорема (М. 2014)

Для любого фиксированного набора параметров $\bar{p} \in \mathbb{R}$ в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ существуют Σ–представления для структуры $\langle \mathbb{R}; \leqslant \rangle$, не имеющие нетривиальных изоморфных вложений в себя, Σ–определимых с параметрами $\bar{p}$.

Более того, класс таких представлений эффективно бесконечен: контрпример строится равномерно по любому перечислимому с параметрами $\bar{p}$ семейству представлений для линейных порядков.

Теорема о существовании модели

Теорема (М. 2015)

Любая счётная непротиворечивая теория с бесконечными моделями имеет модель мощности 2^ω, Σ–определимую над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$.

В доказательстве существенно используются параметры, сложность которых отражает сложность множества неразличимых элементов.

Вопрос: Можно ли построить такую модель без параметров для разрешимой теории?

Полезные инструменты для доказательств

Теорема (О разложении)

Для любой Σ–формулы $\varphi(\bar{x})$ найдётся вычислимая последовательность бескванторных формул $(\varphi_i(\bar{x}))_{i<\omega}$ языка упорядоченных полей такая, что для всех $\bar{x} \in R$ справедлива эквивалентность

$$\mathbb{HF}(\mathbb{R}) \models \varphi(\bar{x}) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{R} \models \bigvee_{i\in\omega} \varphi_i(\bar{x}).$$

В более общем случае, для $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, существует такая последовательность ∃–формул.

Полезные инструменты для доказательств

Теорема (Алгебраический принцип обобщения, AGP)

Пусть $\varphi(\bar{x}, \bar{p})$ — бесконечная дизъюнкция формул первого порядка, верная на некотором кортеже вещественных чисел $\bar{\alpha} = \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R^n$, алгебраически независимым над $\bar{p}$. Тогда эта формула верна и для всех кортежей из некоторой открытой окрестности точки $\bar{\alpha}$.
То же самое верно и для Σ–формул а также для обычных формул первого порядка с параметрами $\bar{p}$ и свободными переменными, содержащимися среди $\bar{x}$.

$\exists$–Алгебраическое замыкание

Пусть $\mathfrak{M}$ — структура, $A \subseteq \mathfrak{M}$. Элемент $a \in \mathfrak{M}$ называется $\exists$–*алгебраическим над* A, если существует $\exists$–формула $\varphi(x, \bar{y})$ и $\bar{b} \in A$ такие, что множество $\varphi^{\mathfrak{M}}[x, \bar{b}]$ конечно и содержит a.

$\mathbf{C}_{\exists}^{\mathfrak{M}}(A)$: алгебраическое $\exists$–замыкание A, множество всех $\exists$–алгебраических над A элементов структуры $\mathfrak{M}$.

∃–Штейницевы структуры

Предложение

Для любых $S, U \subseteq \mathfrak{M}$ выполнены следующие условия:

1. $S \subseteq \mathbf{C}_\exists^\mathfrak{M}(S)$
2. $S \subseteq U \to \mathbf{C}_\exists^\mathfrak{M}(S) \subseteq \mathbf{C}_\exists^\mathfrak{M}(U)$
3. $a \in \mathbf{C}_\exists^\mathfrak{M}(S) \Rightarrow \exists S_0 \subseteq S\big(|S_0| < \omega \wedge a \in \mathbf{C}_\exists^\mathfrak{M}(S_0)\big)$
4. $\mathbf{C}_\exists^\mathfrak{M}(\mathbf{C}_\exists^\mathfrak{M}(S)) = \mathbf{C}_\exists^\mathfrak{M}(S)$

Если в структуре $\mathfrak{M}$ кроме того выполнено *свойство замены:*

$$a \in \mathbf{C}_\exists^\mathfrak{M}(A \cup \{b\}) \setminus \mathbf{C}_\exists^\mathfrak{M}(A) \;\Rightarrow\; b \in \mathbf{C}_\exists^\mathfrak{M}(A \cup \{a\}),$$

то она называется ∃–штейницевой.

Один из примеров: $\mathbb{R}$.

В таких структурах можно говорить о зависимости и размерностях.

Одно достаточное условие непредставимости

Теорема

Предположим, что $\mathfrak{M}$ *— некоторая* ∃*–штейницева структура конечной сигнатуры. Пусть* $\mathfrak{A}$ *— произвольная структура конечной сигнатуры, на которой существуют семейство* $(F_i)_{i<\omega}$*, состоящее из унарных операций, определимых термами с параметрами, и семейство* $(A_i)_{i<\omega}$ *подмножеств* $\mathfrak{A}$*, обладающие следующими свойствами:*

1. *все множества* $F_i\,[A_i]$ *несчётны*
2. *для любой последовательности* $(a_i)_{i<\omega} \in \prod_{i<\omega} A_i$*, найдётся элемент* $b \in \mathfrak{A}$ *такой, что для всех* $i < \omega$ *выполнено* $F_i(b) = F_i(a_i)$*.*

Тогда $\mathfrak{A}$ *не вкладывается ни в какую структуру, имеющую простое* Σ*–представление над* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ *с параметрами.*

Ход доказательства

sp(a): носитель a, множество всех элементов из $\mathfrak{M}$, ‘упомянутых’ в записи a.

Примеры:
$\mathrm{sp}(\varnothing) = \varnothing$, $\mathrm{sp}(\{1, \{1\}\}) = \{1\}$,
$\mathrm{sp}(\{0, \{1, 2, \{\sqrt{3}\}\}\}) = \{0, 1, 2, \sqrt{3}\}$
и т.п.

Пусть $\bar{p} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ и $a \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Тогда $\bar{p}$–размерностью a ($\dim_{\bar{p}}(a)$) называется мощность максимального независимого подмножества sp(a) над $\{\bar{p}\}$.

Из предположения о существовании простого Σ–представления для $\mathfrak{A}$ с параметрами $\bar{p}$ выводится противоречие с конечностью размерности элемента b.

Ход доказательства

sp(a): носитель a, множество всех элементов из $\mathfrak{M}$, ‘упомянутых’ в записи a.

Примеры:
$\mathrm{sp}(\varnothing) = \varnothing$, $\mathrm{sp}(\{1, \{1\}\}) = \{1\}$,
$\mathrm{sp}(\{0, \{1, 2, \{\sqrt{3}\}\}\}) = \{0, 1, 2, \sqrt{3}\}$
и т.п.

Пусть $\bar{p} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ и $a \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Тогда $\bar{p}$–размерностью a ($\dim_{\bar{p}}(a)$) называется мощность максимального независимого подмножества sp(a) над $\{\bar{p}\}$.

Из предположения о существовании простого Σ–представления для $\mathfrak{A}$ с параметрами $\bar{p}$ выводится противоречие с конечностью размерности элемента b.

Пример: непредставимость $P(\omega)$

Пусть $\mathfrak{A}_i \cong P(\omega)$, для всех $i < \omega$, $\mathfrak{A}^* = \prod_{i<\omega} \mathfrak{A}_i$. Пусть 1_i — максимальный элемент в $\mathfrak{A}_i$.

Положим $F_i(x) = x \cap 1_i$. Тогда все $F_i[A_i]$ несчётны, и для для любого семейства $a_i \in \mathfrak{A}_i$, $i < \omega$ выполнено $F_i(b) = F(a_i)$, где $b = \cup_{i<\omega} a_i$.

По теореме имеем $P(\omega) \cong \mathfrak{A}^*$ не вкладывается ни в какую структуру, имеющую простое Σ–представление с параметрами над $\exists$–штейницевой структурой.

Некоторые структуры без простых Σ–представлений над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ (М.):

- б.а. всех подмножеств ω и её фактор по идеалу конечных множеств
- группа всех перестановок на ω и её фактор по подгруппе всех финитарных перестановок
- полугруппа всех отображений из ω в ω
- решётки всех открытых и замкнутых подмножеств $\mathbb{R}$
- группа всех Σ–определимых перестановок на $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$
- полугруппа всех таких отображений из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$
- полугруппа всех непрерывных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$
- некоторые структуры нестандартного анализа (включая ультрастепени $\mathbb{R}$ по идеалу Фреше с выделенными стандартными и бесконечно малыми элементами)

Невложимость ω_1

Теорема

Пусть $\preccurlyeq$ и L — подмножества $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$, определимые Σ–формулами с параметрами, и пусть $\preccurlyeq$ — предпорядок на L. Тогда не существует изоморфного вложения из ω_1 в $\langle L; \preccurlyeq \rangle$.

Замечание Этот результат неверен для борелевских предпорядков. Контрпримером может служить $\langle P(\omega); \subseteq^* \rangle$.

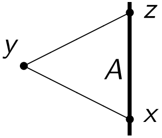
Идея доказательства:

Пусть $A \subseteq L$, $\langle A; \preccurlyeq \rangle \cong \omega_1$. Можно считать, что все элементы из A имеют одну и ту же размерность n_0, и это n_0 — минимально возможное.

Лемма

$\forall x \in A \exists y \in L \exists z \in A (x \preccurlyeq y \preccurlyeq z \wedge \neg(z \preccurlyeq x) \wedge \dim_{\bar{p}}(y) < n_0)$.

$\dim_{\bar{p}}(y) < n_0$

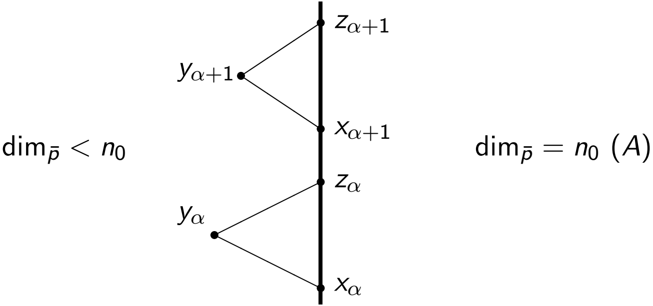


$\dim_{\bar{p}} = n_0 \quad (A)$

Идея доказательства:

Определим по индукции x_α, $z_\alpha \in A$, $y_\alpha \in L$, $\alpha < \omega_1$.

x_α: любой элемент из A, строго больший $\{z_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$.
Выберем $y_\alpha \in L$, $z_\alpha \in A$ так, чтобы $\dim_{\bar{p}}(y_\alpha) < n_0$, $\neg(z_\alpha \preccurlyeq x_\alpha)$,
и $x_\alpha \preccurlyeq y_\alpha \preccurlyeq z_\alpha$ (используем лемму):



Идея доказательства:

Лемма

$\alpha < \beta < \omega_1 \;\Leftrightarrow\; y_\alpha \prec y_\beta$

Отсюда: $\alpha \mapsto y_\alpha$ — изоморфное вложение из ω_1 в $\langle L; \preccurlyeq \rangle$, причём все $\bar{p}$–размерности y_α, $\alpha < \omega_1$ строго меньше n_0.

Отсюда: n_0 — не минимально возможное!

Представимость ординалов

Следствие

Для любого ординала α следующие условия эквивалентны:

1. α *имеет простое Σ–представление над* $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$
2. α *имеет Σ–представление над* $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$
3. α *имеет позитивное Σ–представление над* $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$
4. $\alpha < \omega_1$.

Представимость ординалов без параметров

Следствие

Для любого ординала α следующие условия эквивалентны:

1. α *имеет простое Σ–представление без параметров над* $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$
2. α *имеет Σ–представление без параметров над* $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$
3. $\alpha < \omega_1^{CK}$

Представимость гёделевских конструктивных множеств

$$L_0 = \varnothing, \quad L_{\alpha+1} = \mathtt{Def}\,(L_\alpha), \quad L_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha, \text{ для предельных } \gamma$$

Следствие

Для любого ординала α следующие условия эквивалентны:

1. $\langle L_\alpha; \in\rangle$ *имеет простое Σ–представление над* $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$
2. $\langle L_\alpha; \in\rangle$ *имеет Σ–представление над* $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$
3. $\langle L_\alpha; \in\rangle$ *имеет позитивное Σ–представление над* $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$
4. $\alpha < \omega_1$.

Представимость гёделевских конструктивных множеств

$$L_0 = \varnothing, \quad L_{\alpha+1} = \mathtt{Def}\,(L_\alpha), \quad L_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha, \text{ для предельных } \gamma$$

Следствие

Для любого ординала α следующие условия эквивалентны:

1. $\langle L_\alpha; \in\rangle$ *имеет простое Σ–представление над* $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$
2. $\langle L_\alpha; \in\rangle$ *имеет Σ–представление над* $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$
3. $\langle L_\alpha; \in\rangle$ *имеет позитивное Σ–представление над* $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$
4. $\alpha < \omega_1$.

Представимость гёделевских конструктивных множества без параметров

Теорема

Для любого ординала α следующие условия эквивалентны:

1. *Структура $\langle L_\alpha; \in\rangle$ имеет простое Σ–представление над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ без параметров*
2. $\alpha \leqslant \omega$.

(В доказательстве не используется общий результат)

Следствие

Пусть $\langle L; \leqslant\rangle$ — частичный порядок, у которого для любой не более, чем счётной цепи $C \subseteq L$ существует $x \in L \setminus C$ такое, что $C \leqslant x$.
Тогда $\langle L; \leqslant\rangle$ не имеет позитивных Σ–представлений над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ с параметрами (и, тем более, не имеет ни Σ–представлений ни простых Σ–представлений с параметрами).

Непредставимость некоторых структур степеней

Теорема

Частично упорядоченные множества тьюринговых, m–, 1– и tt–степеней не имеют позитивных Σ–представлений над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ с параметрами (и, тем более, не имеет ни Σ–представлений ни простых Σ–представлений с параметрами).

Представимость над $\mathbb{C}$

Следствие

Пусть α — произвольный ординал. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. α *имеет простое* Σ–*представление над* $\mathbb{HF}(\mathbb{C})$
2. α *имеет* Σ–*представление над* $\mathbb{HF}(\mathbb{C})$
3. α *имеет позитивное* Σ–*представление над* $\mathbb{HF}(\mathbb{C})$
4. $\alpha < \omega_1^{CK}$

Некоторые открытые вопросы

- Верно ли, что у всякой разрешимой теории с бесконечными моделями существует Σ–представимая над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ без параметров модель мощности 2^ω?
- Сколько возможных Σ–представлений над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ может иметь структура мощности 2^ω? Может ли это число равняться ω, быть конечным? Каково это число для структуры мощности 2^ω пустой сигнатуры?
- Сколько возможных Σ–представлений над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ существует у структуры $\langle \mathbb{R}; + \rangle$? (Известно, что $\geqslant \omega$)
- Являются ли Σ–представимыми над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ поля формальных степенных рядов над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$?

Некоторые публикации

- А. С. Морозов, О Σ–предпорядках в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$, Алгебра и логика, 58:5 (2019), 609–626
- А. С. Морозов, Непредставимость некоторых структур анализа в наследственно конечных надстройках, Алгебра и логика, 56:6 (2017), 691–711
- А. С. Морозов, Об одном достаточном условии непредставимости структур в наследственно конечных надстройках, Алгебра и логика, 55:3 (2016), 366–379
- А. С. Морозов, О Σ–представлениях вещественного порядка, Алгебра и логика, 53:3 (2014), 340–371
- А. С. Морозов, Σ–жесткие представления вещественного порядка, Сиб. матем. журн., 55:3 (2014), 562–572
- А. С. Морозов, О некоторых представлениях поля вещественных чисел, Алгебра и логика, 51:1 (2012), 96–128
- А. С. Морозов, М. В. Коровина, О Σ–определимости счётных структур над вещественными, комплексными числами и кватернионами, Алгебра и логика, 47:3 (2008), 335–363

Содержание доклада:

- KPU и наследственно конечные надстройки
- Σ–представимые структуры
- Представимость некоторых полей
- Представимость над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ без параметров
- Представления $\mathbb{R}$ над $\mathbb{R}$
- Представления для $\langle\mathbb{R}; \leqslant\rangle$
- Теорема о существовании модели
- Достаточное условие непредставимости над ∃–штейницевыми структурами
- Невложимость ω_1 в Σ–представимые предпорядки
  Представимость ординалов
- Представимость гёделевских конструктивных множеств
- Непредставимость некоторых структур степеней
- Представимость над $\mathbb{C}$

Спасибо за внимание!