О полноте трансфинитных итераций схем рефлексии

Пахомов Ф.Н.
Институт Математики Академии Наук Чешской Республики, Прага
Математический Институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук
pakhfn@gmail.com
Совместная работа с М. Ратьеном, Д. Россегером

Петербургского логического семинар,
12 Мая, 2020

Формальная арифметика PA

Сигнатура: $0, 1, +, \times, 2^x, =, \leq$

Аксиомы:

- Набор базовых свойств $0, 1, +, \times, 2^{\cdot}, \leq$
- Схема индукции:

$$\varphi(0) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x+1)) \to \forall x\, \varphi(x)$$

Класс Δ_0, состоит из формул, где все кванторы имеют вид $\forall x \leq t$ или $\exists x \leq t$ с $x \notin FV(t)$.

Класс Π_n состоит из всех формул вида $\forall \vec{x}_1 \exists \vec{x}_2 \ldots Q\vec{x}_n \varphi$, где $\varphi \in \Delta_0$.

Класс Σ_n состоит из всех формул вида $\exists \vec{x}_1 \forall \vec{x}_2 \ldots Q\vec{x}_n \varphi$, где $\varphi \in \Delta_0$.

Формализованная доказуемость

Фиксирует естественную гёделеву нумерацию арифметических формул.
Например, формулу φ можно кодировать строкой в двоичном алфавите $a_0 \ldots a_{n-1}$, которую в свою очередь можно кодировать числом $2^n + \sum\limits_{i<n} 2^i a_i$.

Можно выписать арифметическую формулу $\mathrm{Prv}_{\mathrm{PA}}(x)$, которая является формализацией в PA следующего утверждения:

“x это гёделев номер арифметической формулы φ и существует доказательство φ из аксиом PA”

Далее $\mathrm{Prv}_{\mathrm{PA}}(\varphi)$ означает $\mathrm{Prv}_{\mathrm{PA}}(\underbrace{1+\ldots+1}_{n \text{ раз}})$, где n это гёделев номер φ.

Аналогично мы рассматриваем формулы $\mathrm{Prv}_T(x)$ для других теорий T с перечислимой аксиоматизацией.

Вторая теорема Гёделя о неполноте

Формула $\mathrm{Con}(T)$ — это $\neg\mathrm{Prv}_T(0 = 1)$.

Теорема (К. Гёдель, 1931)

Для непротиворечивых перечислимых $T \supseteq \mathrm{PA}$,

$$T \nvdash \mathrm{Con}(T).$$

Доказательство.

Лемма (о неподвижной точке)

Для всякой формулы $\varphi(x)$ *найдется формула* ψ *такая, что*

$$\mathrm{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\psi).$$

Рассмотрим ψ такую, что $\mathrm{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \neg\mathrm{Prv}_T(\psi)$. Легко видеть, что непротиворечивая T не докажет ψ.
Далее можно показать, что $\mathrm{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \mathrm{Con}(T)$. $\square$

Конечные прогрессии Тьюринга

Положим

$$T_0 = T, \quad T_{n+1} = T_n + \mathrm{Con}(T_n)$$

Если T была корректна, т.е. $\mathbb{N} \models T$, то по 2-ой теореме Гёделя о неполноте

$$T_0 \subsetneq T_1 \subsetneq T_2 \subsetneq \ldots \subsetneq T_n \subsetneq \ldots$$

Прогрессии Тьюринга

Пусть $(A, \prec)$ элементарное (Δ_0 в языке с 2^x) вполне упорядочивание (система ординальных обозначений). Естественным образом мы отождествляем элементы A с ординалами $< \Lambda = \mathrm{ot}(A, \prec)$.

Положим
$$T_\alpha = T + \{\mathrm{Con}(T_\beta) \mid \beta \prec \alpha\}.$$

Для того, чтобы сделать определение выше формально корректным мы строим как неподвижную точку формулу $\mathrm{Ax}_{T_\star}(\alpha, \varphi)$, которая выражает тот факт, что φ является аксиомой T_α.

Теорема (А. Тьюринг, 1938)

Для всякого Π_1 предложения φ найдутся система ординальных обозначений $(A, \prec)$ и ординал $\alpha \in A$ такие, что $\mathrm{PA}_\alpha \vdash \varphi$.

Схемы равномерной рефлексии

$$\mathrm{RFN}(T): \quad \forall \vec{x}\,(\mathrm{Prv}_T(\varphi(\vec{x})) \to \varphi(\vec{x})), \text{ где } \vec{x} = \mathrm{FV}(\varphi)$$

Легко видеть, что $\mathrm{PA} + \mathrm{RFN}(T) \vdash \mathrm{Con}(T)$.

Положим

$$T_\alpha^\omega = T + \{\mathrm{RFN}(T_\beta^\omega) \mid \beta \prec \alpha\}.$$

Теорема (С. Феферман, 1962)

Для любого истинного арифметического предложения φ найдутся система ординальных обозначений $(A, \prec)$ и ординал $\alpha \in A$ такие, что $\mathrm{PA}_\alpha^\omega \vdash \varphi$.

Схема трансфинитной индукции

Схема $\mathsf{TI}(A, \prec)$:

$$\forall x \in A(\forall y \prec x \varphi(y) \to \varphi(x)) \to \forall x \in A\, \varphi(x).$$

Лемма

$$\mathsf{PA}^{\omega}_{\alpha+1} \vdash \mathsf{TI}(A \restriction_{\prec\alpha}, \prec)$$

Доказательство.

2-я теорема о неполноте для теории $\mathsf{PA} + \neg\varphi$ дает

Теорема (М.Х. Лёб, 1955)

Для предложений φ*, если* $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Prv}_{\mathsf{PA}}(\varphi) \to \varphi$*, то* $\mathsf{PA} \vdash \varphi$*.*

Легко убедиться, что

$$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Prv}_{\mathsf{PA}}\Big(\forall \alpha \in A\ (\mathsf{PA}^{\omega}_{\alpha+1} \vdash \mathsf{TI}(A \restriction_{\prec\alpha}, \prec))\Big) \to$$
$$\forall \alpha \in A\ (\mathsf{PA}^{\omega}_{\alpha+1} \vdash \mathsf{TI}(A \restriction_{\prec\alpha}, \prec))$$

Следовательно данная лемма доказуема в PA.

Теория ACA_0

ACA_0 — это двусортная теория расширяющая PA.
Второй сорт переменных $X_1, X_2, \ldots$ понимается как сорт множеств натуральных чисел
Сигнатура ACA_0 содержит дополнительный предикатный символ $x \in X$

Аксиомы ACA_0:

- PA
- $0 \in X \wedge \forall x\,(x \in X \to x+1 \in X) \to \forall x\; x \in X$
- $\exists X \forall x\,(\varphi(x) \leftrightarrow x \in X)$, где φ пробегает формулы без второпорядковых кванторов и $X \notin FV(\varphi)$

Предложение

Первопорядковая часть ACA_0 это в точности PA.

Предложение

Пусть $(A, \prec)$ — это элементарный линейный порядок. Первопорядковая часть $\mathrm{ACA}_0 + \mathrm{WO}(A, \prec)$ это в точности $\mathrm{PA} + \mathrm{TI}(A, \prec)$.

Π^1_1-полнота множества ординальных обозначений

Класс Π^1_1 состоит из всех формул вида $\forall \vec{X}\, \varphi$, где φ не содержит второпорядковых кванторов.

Предложение

Для всякого Π^1_1-предложения φ найдется элементарный линейный порядок $(A, \prec)$ такой, что

$$\mathsf{ACA}_0 \vdash \varphi \leftrightarrow \mathsf{WO}(A, \prec).$$

Для целей доказательства теоремы Фефермана мы ограничимся только случаем, когда φ первопорядковая формула.

ω-логика

Рассмотрим формулы составлены с помощью связок $\wedge, \vee$ и кванторов $\forall, \exists$ из литералов, т.е. атомарных формул или их отрицани.

Секвенции Γ, Δ — это конечные последовательности арифметических предложений указанного выше вида.

$$\frac{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta}{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta} \qquad \frac{\Gamma, \varphi, \varphi}{\Gamma, \varphi} \qquad \frac{\Gamma}{\Gamma, \varphi} \qquad \frac{\Gamma}{\Gamma}$$

$$\frac{}{\Gamma, t = v}, \text{ где } \varphi \text{ истинный литерал (Ax);}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \qquad \Gamma, \psi}{\Gamma, \varphi \wedge \psi} (\wedge\text{-Int}); \qquad \frac{\Gamma, \varphi, \psi}{\Gamma, \varphi \vee \psi} (\vee\text{-Int});$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(t)}{\Gamma, \exists x\, \varphi(x)}, \text{ где } t \text{ замкнутый терм } (\exists\text{-Int});$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(\underline{n}), \quad \text{для всевозожных } n \in \mathbb{N}}{\Gamma, \forall x\, \varphi(x)} (\forall^{\omega}\text{-Int}).$$

Канонические преддоказательства

Преддоказательство — это дерево вывода, которое локально подчиняется правилам логики, но не обязано быть фундированным.

Каноническое преддоказательства C_Γ:

- $C_{\Gamma,\varphi}: \dfrac{}{\Gamma, \varphi}$, если φ истинный литерал
- $C_{\Gamma,\varphi}: \dfrac{\dfrac{C_\Gamma}{\Gamma}}{\Gamma, \varphi}$, если φ ложный литерал
- $C_{\Gamma,\varphi\wedge\psi}: \dfrac{\dfrac{C_{\Gamma,\varphi}}{\Gamma,\varphi} \quad \dfrac{C_{\Gamma,\psi}}{\Gamma,\psi}}{\Gamma, \varphi \wedge \psi}$, $C_{\Gamma,\varphi\vee\psi}: \dfrac{\dfrac{C_{\Gamma,\varphi,\psi}}{\Gamma,\varphi,\psi}}{\Gamma, \varphi \vee \psi}$ и

  $C_{\Gamma,\forall x\, \varphi(x)}: \dfrac{\dfrac{C_{\Gamma,\varphi(n)}}{\Gamma,\varphi(n)},\ n \in \mathbb{N}}{\Gamma, \forall x\, \varphi(x)}$
- $C_{\Gamma,\exists x\, \varphi(x)}: \dfrac{\dfrac{C_{\exists x\, \varphi(x),\Gamma,\varphi(n)}}{\exists x\, \varphi(x),\Gamma,\varphi(n)}}{\Gamma, \exists x\, \varphi(x)}$, где n минимально, что $\varphi(n) \notin \Gamma$
- $C_\emptyset: \dfrac{\dfrac{C_\emptyset}{\emptyset}}{\emptyset}$

Канонические преддоказательства

Теорема (К. Шутте)

$\mathbb{N} \models \Gamma \iff$ *дерево* C_Γ *фундировано.*

Более того, $\mathsf{ACA}_0 \vdash \bigvee \Gamma \leftrightarrow \mathsf{WF}(C_\Gamma)$.

Таким образом, $\mathsf{ACA}_0 \vdash \bigvee \Gamma \leftrightarrow \mathsf{WO}(KB_\Gamma)$, где KB_Γ — это порядок Клини-Брауэра на C_Γ.

Простое доказательство теоремы Фефермана

Теорема (С. Феферман, 1962)

Для любого истинного арифметического предложения φ найдутся система ординальных обозначений $(A, \prec)$ и ординал $\alpha \in A$ такие, что $\mathsf{PA}^{\omega}_{\alpha} \vdash \varphi$.

Доказательство.

Возьмем в качестве $(A, \prec)$ порядок $KB_{\varphi} + 1$ и в качестве α его наибольший элемент

Из того, что мы доказали про трансфинитную индукцию и прогрессии Тьюринга-Фефермана следует, что

$$\mathsf{PA}^{\omega}_{\alpha} \vdash \mathsf{TI}(KB_{\varphi}).$$

Таким образом,

$$\mathsf{PA}^{\omega}_{\alpha} \supseteq (\mathsf{ACA}_0 + \mathsf{WO}(KB_{\varphi})) \cap \mathcal{L}(\mathsf{PA}) = (\mathsf{ACA}_0 + \varphi) \cap \mathcal{L}(\mathsf{PA}) = \mathsf{PA} + \varphi.$$

$\Box$

Оптимальное значение α

Отметим, что конструкция выше дает неоптимальные значения α. В частности они могут быть больше, чем ω^ω.

Теорема (П., М. Ратьен, Д. Россегер)

Для всякого истинного $\varphi \in \Pi_{2n+1}$ можно найти $(A, \prec)$ и α соответствующий $\omega^n + 1$ такие, что $\mathsf{PA}^\omega_\alpha \vdash \varphi$.
Ординал $\omega^n + 1$ — это минимально возможный ординал для которого такое утверждение истинно.

Спасибо!