Constructive Axiomatic Method and Univalent Foundations of Mathematics

Andrei Rodin (andrei@philomatica.org)

Steklov Mathematical Institute, Saint-Petersburg, 26 November 2018

UF overview

Constructivism

MLTT

Homotopy hierarchy

Constructive Axiomatic Method

UF vs. ZFC

	ZFC	UF
Logic	Cl. FOL	MLTT
Extras	ZFC axioms	H-interpretation
Axiomatic Style	Hilbert	Gentzen
Joining Extras	Non-Logical Constants	H-levels

Motivations:

- Presentation of mathematical proofs in a computer-checkable form;
- Formal support for reasoning "up to" isomorphism and higher equivalences (Benacerraf problem);
- Mathematical Constructivism;

Computer-chechable proofs:

AUTOMATH (de Bruijn 1967), MIZAR (since 1973), HOL, Lego, Isabelle, Nuprl, Nqthm, AC2L, Elf, Plastic, Phox, PVS, IMPS, QED, . . .

Ask Jeremy Avigad for a recent overview

Isomorphism-Invariance :

For any proposition P about object X and any isomorphism $X \cong X'$ there exists proposition P' about object X' such as P' is true if and only if P is true.

Breaking of II in the ZFC-coding:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

where

- $i \in \mathbb{N}$;
- $i \in \mathbb{Z}$

In ZFC whole numbers are encoded as ordered pairs of natural numbers. So in ZFC the two versions of the formula (for natural and whole numbers) are not logically equivalent.

Markov 1962

В последнее время в математике получило значительное развитие конструктивное направление. Его суть состоит в том, что исследование ограничивается конструктивными объектами и проводится в рамках абстракции потенциальной осуществимости без привлечения абстракции актуальной бесконечности; при этом отвергаются так называемые чистые теоремы существования, поскольку существование объекта с данными свойствами лишь тогда считается доказанным, когда указывается способ потенциально осуществимого построения объекта с этими свойствами.

Markov 1962

Конструктивные объекты - это некоторые фигуры, определенным образом составленные из элементарных фигур - элементарных конструктивных объектов. ... Один из простейших типов конструктивных объектов образуют слова в определенном фиксированном алфавите. Слово в данном алфавите есть ряд букв этого алфавита.

Markov 1962

В конструктивной математике существование объекта с данными свойствами лишь тогда считается доказанным, когда указан способ потенциально осуществимого построения объекта с этими свойствами. Таким образом, конструктивисты и "классики" по-разному понимают самый термин "существование" в связи с математическими объектами.

Замечание 1:

Требование рассмотрения только конструктивных объектов, то есть сложных объектов, которые построены из элементарных по определенным правилам, СОВМЕСТИМО с использованием абстракции актуальной бесконечности. Бесконечное множество может быть принято в качестве элементарного объекта, а операция "построить множество подмножеств данного множества" - в качестве правила построения.

Вообще нет причин заранее ограничивать список допустимых конструктивных правил тем или иным способом. "Аксиоматическая свобода" должна распространяться на правила.

Замечание 2:

Важной часть понятия конструктивности, которое использует Марков, является идея о том, что в конструктивной математике должны быть правила, которые применяются НЕ к высказываниям, а к объектам других типов. Если считать, что *логические* правила вывода всегда применяются к высказыванием, то такие правила нужно считать вне-логическими.

Замечание 2 (продолжение):

Геометрическая теория изложенная в первых четырех книгах Евклида является конструктивной в том смысле, что она содержит Постулаты, которые представляют собой правила построения новых геометрических фигур из данных фигур (построения циркулем и линейкой).

Т.н. "аксиомы" (которые сам Евклид называет иначе) - это тоже правила, которые позволяют выводить новые равенства из данных равенств.

Замечание 2 (продолжение):

Подобную идею высказывал Гильберт, когда противопоставлял свой “экзистенциальный” аксиоматический метод “генетическому” методу построения теорий, который он также называл конструктивным. Пример генетического построения, которое, однако, не является конструктивным в смысле Маркова (и вообще не является конструктивным в общепринятом смысле термина) - сечения Дедекинда.

Эта идея также мотивировала *исчисление задач* А.Н. Колмогорова и конструктивную теорию типов П. Мартина-Лефа. Однако только гомотопическая теория типов позволяет формально различать пропозициональные и непропозициональные типы, и увидеть, какую роль играют непропозициональные конструкции в доказательствах

MLTT: Syntax

- 4 basic forms of judgement:
  (i) $A : TYPE$;
  (ii) $A \equiv_{TYPE} B$;
  (iii) $a : A$;
  (iv) $a \equiv_A a'$
- Context : $\Gamma \vdash$ judgement (of one of the above forms)
- no axioms (!)
- rules for contextual judgements; Ex.: dependent product :
  If $\Gamma, x : X \vdash A(x) : TYPE$, then $\Gamma \vdash (\Pi x : X)A(x) : TYPE$

MLTT: Semantics of $t : T$ (Martin-Löf 1983)

- t is an element of set T
- t is a proof (construction) of proposition T ("propositions-as-types")
- t is a method of fulfilling (realizing) the intention (expectation) T
- t is a method of solving the problem (doing the task) T (BHK-style semantics)

Sets and Propositions Are the Same

If we take seriously the idea that a proposition is defined by lying down how its canonical proofs are formed [...] and accept that a set is defined by prescribing how its canonical elements are formed, then it is clear that it would only lead to an unnecessary duplication to keep the notions of proposition and set [...] apart. Instead we simply identify them, that is, treat them as one and the same notion. (Martin-Löf 1983)

MLTT: Definitional aka judgmental equality/identity

$x, y : A$ (in words: x, y are of type A)

$x \equiv_A y$ (in words: x is y by definition)

MLTT: Propositional equality/identity

$p : x =_A y$ (in words: x, y are (propositionally) equal as this is evidenced by proof p)

Definitional eq. entails Propositional eq.

$$\frac{x \equiv_A y}{p : x =_A y}$$

where $p \equiv_{x=_A y} refl_x$ is built canonically

Equality Reflection Rule (ER)

$$\frac{p : x =_A y}{x \equiv_A y}$$

ER is not a theorem in the (intensional) MLTT (Streicher 1993).

Extension and Intension in MLTT

- MLTT + ER is called *extensional* MLTT
- MLTT w/out ER is called *intensional*
  (notice that according to this definition intensionality is a negative property!)

Higher Identity Types

- $x', y' : x =_A y$
- $x'', y'' : x' =_{x =_A y} y'$
- $\ldots$

HoTT: the Idea

Types in MLTT are (informally!) modeled by spaces (up to homotopy equivalence) in Homotopy theory, or equivalently, by higher-dimensional groupoids in Category theory (in which case one thinks of n-groupoids as higher homotopy groupoids of an appropriate topological space).

Homotopical interpretation of Intensional MLTT

- $x, y : A$
  x, y are points in space A
- $x', y' : x =_A y$
  x', y' are paths between points x, y; $x =_A y$ is the space of all such paths
- $x'', y'' : x' =_{x=_A y} y'$
  x'', y'' are homotopies between paths x', y'; $x' =_{x=_A y} y'$ is the space of all such homotopies
- $\ldots$

Point

Definition

Space S is called contractible or space of h-level (-2) when there is point $p : S$ connected by a path with each point $x : A$ in such a way that all these paths are homotopic (i.e., there exists a homotopy between any two such paths).

Homotopy Levels

Definition

We say that S is a space of h-level $n+1$ if for all its points x, y path spaces $x =_S y$ are of h-level n.

Cummulative Hierarchy of Homotopy Types

- -2-type: single point pt;
- -1-type: the empty space $\emptyset$ and the point pt: truth-values aka (mere) propositions
- 0-type: sets: points in space with no (non-trivial) paths
- 1-type: flat groupoids: points and paths in space with no (non-trivial) homotopies
- 2-type: 2-groupoids: points and paths and homotopies of paths in space with no (non-trivial) 2-homotopies
- ...

Propositions-as-**Some**-Types !

Which types are propositions?

Def.: Type P is a *mere proposition* if $x, y : P$ implies $x = y$ (definitionally).

Truncation

Each type is transformed into a (mere) proposition when one ceases to distinguish between its terms, i.e., *truncates* its higher-order homotopical structure.

Interpretation: Truncation reduces the higher-order structure to a single element, which is **truth-value**: for any non-empty type this value is **true** and for an empty type it is **false**.
The reduced structure is the structure of **proofs** of the corresponding proposition.
To treat a type as a proposition is to ask whether or not this type is instantiated without asking for more.

- Thus in HoTT "merely logical" rules (i.e. rules for handling propositions) are instances of more general formal rules, which equally apply to non-propositional types.
- These general rules work as rules of building models of the given theory from certain basic elements which interpret primitive terms (= basic types) of this given theory.
- Thus HoTT qualify as *constructive* theory in the sense that besides of propositions it comprises non-propositional objects (on equal footing with propositions rather than "packed into" propositions as usual!) and formal rules for managing such objects (in particular, for constructing new objects from given ones). In fact, HoTT comprises rules with apply *both* to propositional and non-propositional types.

HoTT is not wholly compatible of the intended semantics of MLTT

In view of *h*-hierarchy of types the term "judgement" for all expressions of form $a : A$ is not appropriate. An appropriate general term is "declaration".

Univalence

$$(A =_{TYPE} B) \simeq (A \simeq B)$$

In words: equivalnce of types is equivalent to their equality.

For PROPs: $(p = q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$ (propositional extensionality)

For SETs: Propositions on isomorphic sets are logically equivalent (isomorphism-invariance)

Univalence implies *functional extensionality*: if for all $x \;\; X$ one has $fx =_Y gx$ then $f =_{X \to Y} g$ (the property holds at all h-levels).

Constructive Theory

A confluent system of rules some applications of which are logical (= propositional) while some other are not.

Constructive Architecture of Theories

- Gentzen-style;
- The logical part of a given theory is “internal” in the sense that it is built along with the extra-logical parts of the theory.

Example: $\mathbb{N}$ as IT

- Formation: $\mathbb{N} : TYPE$
- Introduction: $0 : \mathbb{N}$ and $(x : \mathbb{N}) \vdash (S(x) : \mathbb{N})$
- Elimination: if $c_0 : C(0)$ and
  $x : \mathbb{N}, (r : C(x)) \vdash (c_s : C(S(x))$
  then for $p : \mathbb{N}$ we have $rec(p, c_0, c_s : C(p))$

  (where r is the result of recursive call at x).

Example: Circle as HIT

- Formation: $S^1 \; : \; TYPE$;
- Introduction: $base \; : S^1$ and $loop \; : (base = base)$
- (Dependent) Elimination: given $b \; : C(base)$ and $l \; : (trans(loop, b) = b)$ for any $p \; : S^1$ we have $match(p, b, l) \; : C(p)$
- Computation: $match(base, b, l)$ computes to b and $map(match(-, b, l), loop$ computes to $loop$.

Claim:

This notion of constructive theory better describes the colloquial concept of theory in Mathematics and Science than the standard Hilbert's notion. In Science it allows for representing *methods* (including experimental setups and designs), which belong to any scientific theory deserving the name.

Open Problem: Model theory of HoTT and the Initiality Conjecture

Build a category of models for MLTT (or its replacement) where the *term model* is the initial object. Solved only for Calculus of Constructions (CoC, after Th. Coquand) by Th. Streicher in 1991. CoC is a small fragment of MLTT. Cf. Lawvere's conception of theory as a "generic model".