Канонические расширения в логике: основные результаты и примеры использования

Даня Рогозин
МГУ им. Ломоносова

21 апреля 2020

Петербургский логический семинар
ПОМИ РАН

Введение

Представления

- Представления и двойственности довольно распространены в алгебре

Представления

- Представления и двойственности довольно распространены в алгебре
- Пример из “обычной” математики: коммутативные кольца и аффинные схемы, топологическое представление колец через спектр

Представления

- Представления и двойственности довольно распространены в алгебре
- Пример из “обычной” математики: коммутативные кольца и аффинные схемы, топологическое представление колец через спектр
- За каждой логикой сидит алгебраическая структура, и семантические аспекты различных методов можно изучать алгебраическими методами
- Алгебраические структуры, представляющие интерес с логической точки зрения, также допускают характеризацию через построение определенного рода спектра по аналогии с коммутативными кольцами и топологией Зарисского

Представления

- Представления и двойственности довольно распространены в алгебре
- Пример из “обычной” математики: коммутативные кольца и аффинные схемы, топологическое представление колец через спектр
- За каждой логикой сидит алгебраическая структура, и семантические аспекты различных методов можно изучать алгебраическими методами
- Алгебраические структуры, представляющие интерес с логической точки зрения, также допускают характеризацию через построение определенного рода спектра по аналогии с коммутативными кольцами и топологией Зарисского
- Такое представление в интересных нам случаях называется стоуновским, что названо в Маршалла Стоуна

Каноничность

- В логике очень часто доказывается полнота относительно той или иной канонической структуры, можно вспомнить лемму о канонической модели как часть доказательства теоремы Геделя о полноте
- В неклассических логиках полнота относительно своей канонической структуры (шкалы Крипке, как правило) называется *каноничностью*

Каноничность

- В логике очень часто доказывается полнота относительно той или иной канонической структуры, можно вспомнить лемму о канонической модели как часть доказательства теоремы Геделя о полноте
- В неклассических логиках полнота относительно своей канонической структуры (шкалы Крипке, как правило) называется *каноничностью*
- С другой стороны, стоуновское вложение интересной нам алгебры называется *каноническим расширением*
- Таким образом, у нас есть две каноничности, и довольно разумно задаться вопросом об их соотношении
- Сегодня мы постараемся увидеть, что это две стороны одной медали

О представлении булевых алгебр

Булева алгеба

Булева алгебра — это алгебраическая структура $\mathcal{B} = \langle B, \vee, -, 0, 1 \rangle$, где

- $\vee$ ассоциативная, коммутативная, идемпотентная операция
- 0 — нейтральный элемент к $\vee$
- Аксиомы дополнения:
    - $-(-a) = a$
    - $a \vee -a = 1$
    - $-1 = 0$
- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, где $a \wedge b = -(-a \vee -b)$

Атомы в булевой алгебре

Для начала будем говорить о конечных булевых алгебрах:

Определение

Пусть $\mathcal{B}$ *— это (конечная) булева алгебра, тогда элемент* $a \in \mathcal{B}$ *называется атомом, если для любого* $b \in \mathcal{B}$, $b \leqslant a$ *влечет, что* $a = b$ *или* $b = \perp$. $\mathrm{At}(\mathcal{B})$ *— это множество всех атомов булевой алгебры* $\mathcal{B}$.

Атомы в булевой алгебре

Для начала будем говорить о конечных булевых алгебрах:

Определение

Пусть $\mathcal{B}$ — это (конечная) булева алгебра, тогда элемент $a \in \mathcal{B}$ называется атомом, если для любого $b \in \mathcal{B}$, $b \leqslant a$ влечет, что $a = b$ или $b = \bot$. $\mathrm{At}(\mathcal{B})$ — это множество всех атомов булевой алгебры $\mathcal{B}$.

Теорема
Всякая конечная булева алгебра изоморфна алгебре подмножеств множества своих атомов.

Proof.
Пусть $a \in \mathcal{B}$, положим $U_a = \{b \in \mathrm{At}(\mathcal{B}) \mid b \leqslant a\}$. Достаточно проверить, что отображение $f : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(\mathrm{At}(\mathcal{B}))$, где $f : a \mapsto U_a$ является изоморфизмом конечных булевых алгебр. $\square$

Что делать дальше

Произвольная булева алгебра не обязана быть атомной.

Примером такой булевой алгебры является алгебра Линденбаума-Тарского, которая получается факторизацией формул пропозиционального языка по модулю их доказуемой эквивалентности в классической логике высказываний.

Что делать дальше

Произвольная булева алгебра не обязана быть атомной.

Примером такой булевой алгебры является алгебра Линденбаума-Тарского, которая получается факторизацией формул пропозиционального языка по модулю их доказуемой эквивалентности в классической логике высказываний.

Мы обобщим описанную идею из представления конечных булевых алгебр, используя следующую схему:

1. Множество $\to$ топологическое пространство
2. Атомы $\to$ ультрафильтры в булевой алгебре
3. Множество атомов, меньших данного элемента a $\to$ множество ультрафильтров, содержащий элемент a

Пространства Стоуна

Определение

Топологическое пространство называется пространством Стоуна, если оно компактно, нульмерно и хаусдорфово

Пространства Стоуна

Определение

Топологическое пространство называется пространством Стоуна, если оно компактно, нульмерно и хаусдорфово

Пусть $\mathcal{B} = \langle B, \vee, -, 0, 1\rangle$, $\mathrm{Uf}(\mathcal{B})$ — это множество ультрафильтров. Пусть $a \in \mathcal{B}$, введем $\mathcal{U}_a = \{F \in \mathrm{Uf}(\mathcal{B}) \mid a \in F\}$. Тогда

- $\mathcal{U}_a$ коммутирует с операциям и константами
- Семейство $\{\mathcal{U}_a\}_{a \in \mathcal{B}}$ образует открыто-замкнутую базу
- Пространство $\langle \mathrm{Uf}(\mathcal{B}), \tau\rangle$ — это пространство Стоуна, где τ — это замыкание $\{\mathcal{U}_a\}_{a \in \mathcal{B}}$ относительно произвольных объединений

Представление булевых алгебр, двойственность Стоуна

Пусть $\mathcal{X}$ — это пространство Стоуна, обозначим $\mathrm{Clopen}(\mathcal{X})$ — множество всех открыто-замкнутых множеств. Заметим, что оно образует булеву алгебру.

Теорема

- *Пусть $\mathcal{B}$ — это булева алгебра, тогда* $\mathcal{B} \cong \mathrm{Clopen}(\mathrm{Uf}(\mathcal{B}))$
- *Пусть $\mathcal{X}$ — это пространство Стоуна, тогда $\mathcal{X}$ гомеоморфно* $\mathrm{Uf}(\mathrm{Clopen}(\mathcal{X}))$

Представление булевых алгебр, двойственность Стоуна

Пусть $\mathcal{X}$ — это пространство Стоуна, обозначим $\mathsf{Clopen}(\mathcal{X})$ — множество всех открыто-замкнутых множеств. Заметим, что оно образует булеву алгебру.

Теорема

- *Пусть $\mathcal{B}$ — это булева алгебра, тогда* $\mathcal{B} \cong \mathsf{Clopen}(\mathsf{Uf}(\mathcal{B}))$
- *Пусть $\mathcal{X}$ — это пространство Стоуна, тогда $\mathcal{X}$ гомеоморфно* $\mathsf{Uf}(\mathsf{Clopen}(\mathcal{X}))$

Каноническим расширением булевой алгебры $\mathcal{B}$ называют алгебры подмножеств вида $\mathcal{B}^+ = \langle \mathcal{P}(\mathsf{Uf}(\mathcal{B})), \cup, -, \varnothing, \mathsf{Uf}(\mathcal{B}) \rangle$, что дает единообразное вложение любой булевой алгебры в алгебру помножеств (полную, атомную).

Булевы алгебры с операторами и их представления

Определение булевой алгебры с операторами

- Пусть $\mathcal{B}$ — это булева алгебра, оператором над булевой алгеброй называется функция $\Omega : \mathcal{B}^n \to \mathcal{B}$, такая, что
  1. $\Omega(a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_{n-1}) = 0$
  2. $\Omega(a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, b \vee c, a_{i+1}, \ldots, a_{n-1}) = \Omega(a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_{n-1}) \vee \Omega(a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \ldots, a_{n-1})$
  3. Оператор *вполне аддитивен*, если он сохраняет все существующие верхние грани в каждом аргументе, булева алгебра с операторами вполне аддитивна, если каждый ее оператор вполне аддитивен
- Булевой алгеброй с операторами называется структура $\mathfrak{B} = \langle \mathcal{B}, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$, где $\mathcal{B}$ — это булева алгебра и для каждого $i \in I$, f_i — это оператор

Примеры булевых алгебр с операторами. Топологические булевы алгебры

- Топологическая булева алгебра — это алгебра с оператором замыкания $\Diamond$, то есть унарным оператором $\Diamond$, удовлетворяющим дополнительным условию: $a \leqslant \Diamond a = \Diamond\Diamond a$
- Естественный пример топологической булевой алгебры — это алгебра подмножеств непустого множества с оператором замыкания, который индуцируется топологией на этом множестве
- С точки зрения логики, топологическая булева алгебра — это алгебра модальной логики $S4$
- Обобщение топологической булевой алгебры — это модальная алгебра с унарным оператором без дополнительных требований

Примеры булевых алгебр с операторами. Цилиндрические алгебры

Как мы знаем, булева алгебра — это алгебра классической логики. Алгебры первопорядковых теорий (с равенством) являются булевы алгебры с операторами.

Пусть α — это ординал (как правило, предельный), тогда диагональной цилиндрической алгеброй размерности α называется булева алгебра с операторами $\mathcal{C} = \langle \mathcal{B}, \{c_i\}_{i<\alpha}, \{d_{ij}\}_{i,j<\alpha} \rangle$, где

Примеры булевых алгебр с операторами. Цилиндрические алгебры

Как мы знаем, булева алгебра — это алгебра классической логики. Алгебры первопорядковых теорий (с равенством) являются булевы алгебры с операторами.

Пусть α — это ординал (как правило, предельный), тогда диагональной цилиндрической алгеброй размерности α называется булева алгебра с операторами $\mathcal{C} = \langle \mathcal{B}, \{c_i\}_{i<\alpha}, \{d_{ij}\}_{i,j<\alpha} \rangle$, где

- $\mathcal{B}$ — это булева алгебра, для каждых $i, j \leqslant \alpha$ c_i — это оператор и $d_{ij} \in \mathcal{B}$
- Для каждого $i < \alpha$, $a \leqslant c_i a$, $c_i(a \wedge c_i b) = c_i a \wedge c_i b$ и $d_{ii} = 1$
- Для каждых $i, j < \alpha$, $c_i c_j a = c_j c_i a$
- Если $k \neq i, j < \alpha$, то $d_{ij} = c_k(d_{ij} \wedge d_{jk})$
- Если $i \neq j$, то $c_i(d_{ij} \wedge a) \wedge c_i(d_{ij} \wedge -a) = 0$

Примеры булевых алгебр с операторами. Реляционные алгебры

Реляционная алгебра — это алгебра операций над отношениями. Более точно, точно, реляционная алгебра — это алгебра $\mathcal{R} = \langle \mathcal{B}, ; , ^{-1}, \mathbf{1} \rangle$, где

- $;$ ассоциативная операция, $(a \vee b); c = (a; c) \vee (b; c)$ и $a; \mathbf{1} = a$
- $(a^{-1})^{-1} = a$, $(a \vee b)^{-1} = a^{-1} \vee b^{-1}$, $(a; b)^{-1} = b^{-1}; a^{-1}$
- $a^{-1}; (-(a; b)) \leqslant -b$

Естественный пример реляционной алгебры — это подмножества $X \times X$, где $X \neq \varnothing$

- $R; S = \{\langle a, c \rangle \mid \exists b \in X \, \langle a, b \rangle \in R \,\&\, \langle b, c \rangle \in R\}$
- $\mathbf{1} = \{\langle a, a \rangle \mid a \in X\}$
- $R^{-1} = \{\langle a, c \rangle \mid \langle c, a \rangle \in R\}$

Комлексная алгебра

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, \{R_i\}_{i \in I} \rangle$ — это реляционная структура, где каждое $R_i \subseteq W^n$ для некоторого $n < \omega$. *Комплексной алгеброй* реляционной структуры $\mathcal{F}$ — это вполне аддитивная булева алгебра с операторами $\mathfrak{Cm}\mathcal{F}$ следующего вида:

- Булев редукт $\mathfrak{Cm}\mathcal{F}$ — это алгебра подмножеств $\mathcal{P}(W)$
- Пусть $R_i \subseteq W^{n+1}, n < \omega$, тогда $\Omega_{R_i}(A_0, \ldots, A_{n-1}) = \{a \in W \mid \exists a_0 \in A_0 \ldots \exists a_{n-1} \in A_{n-1}\ R_i(a_0, \ldots, a_{n-1}, a)\}$

Представление булевых алгебр с операторами

Пусть $\mathfrak{B} = \langle \mathcal{B}, \{\Omega_i\}_{i \in I} \rangle$ — это булева алгебра. Пусть $\Omega \in \{\Omega_i\}_{i \in I}$ — это n-местный оператор. Опеределим $n + 1$-местное отношение на ультрафильтрах булевой алгебры следующим образом:

$R_\Omega(\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}, \gamma) \Leftrightarrow \{\Omega(b_0, \ldots, b_{n-1}) \mid b_i \in \beta_i, i < n\} \subseteq \gamma.$

Представление булевых алгебр с операторами

Пусть $\mathfrak{B} = \langle \mathcal{B}, \{\Omega_i\}_{i \in I} \rangle$ — это булева алгебра. Пусть $\Omega \in \{\Omega_i\}_{i \in I}$ — это n-местный оператор. Опеределим $n+1$-местное отношение на ультрафильтрах булевой алгебры следующим образом:

$R_\Omega(\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}, \gamma) \Leftrightarrow \{\Omega(b_0, \ldots, b_{n-1}) \mid b_i \in \beta_i, i < n\} \subseteq \gamma.$

Тогда структура $\langle \mathrm{Uf}(\mathcal{B}), \{R_{\Omega_i}\}_{i \in I} \rangle$ будет называться реляционным пространством Стоуна:

- Для каждых $\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}$, множество $R_\Omega(\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}, \_) = \{\gamma \in \mathrm{Uf}(\mathcal{B}) \mid R_\Omega(\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}, \gamma)\}$ замкнуто
- Если $A_1, \ldots, A_n$ — открыто-замкнуты, то множество $R_\Omega(B_0, \ldots, B_{n-1}, \_) = \{\gamma \in \mathrm{Uf}(\mathcal{B}) \mid \exists \beta_0 \in B_0 \ldots \exists \beta_{n-1} \in B_{n-1}\ R_\Omega(\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}, \gamma)\}$ открыто-замкнуто

Каноническое расширение булевой алгебры с операторами

Пусть $\mathfrak{B} = \langle \mathcal{B}, \{\Omega_i\}_{i \in I} \rangle$ — это булева алгебра с операторами, тогда каноническим расширением $\mathfrak{B}$ называется вполне аддитивная булева алгебра с операторами $\mathfrak{B}^+ = \langle \mathcal{B}^+, \{\Omega_{R_{\Omega_i}}\}_{i \in I} \rangle = \mathfrak{Cm}\,\mathsf{Uf}(\mathfrak{B})$, комплексная алгебра соответствующего реляционного пространства Стоуна

Каноническое расширение булевой алгебры с операторами

Пусть $\mathfrak{B} = \langle \mathcal{B}, \{\Omega_i\}_{i \in I} \rangle$ — это булева алгебра с операторами, тогда каноническим расширением $\mathfrak{B}$ называется вполне аддитивная булева алгебра с операторами $\mathfrak{B}^+ = \langle \mathcal{B}^+, \{\Omega_{R_{\Omega_i}}\}_{i \in I} \rangle = \mathfrak{Cm}\,\mathsf{Uf}(\mathfrak{B})$, комплексная алгебра соответствующего реляционного пространства Стоуна

Теорема

- *Всякая булева алгебра с операторами вкладывается в* $\mathfrak{B}^+$, *атомную полную вполне аддитивную булеву алгебру с операторами*
- *Всякая булева алгебра с операторами изоморфна алгебре открыто-замкнутых множеств своего реляционного пространства Стоуна*

Канонические классы и многообразия

Пусть $\mathcal{L}$ — это сигнатура функциональных символом. Напомним, что класс $\mathcal{L}$-алгебр называется *многообразием*, если он задается множеством тождеств вида $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 — это $\mathcal{L}$-термы

Канонические классы и многообразия

Пусть $\mathcal{L}$ — это сигнатура функциональных символом. Напомним, что класс $\mathcal{L}$-алгебр называется *многообразием*, если он задается множеством тождеств вида $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 — это $\mathcal{L}$-термы

- Класс булевых алгебр с операторами одного типа K называется каноническим, если он замкнут относительно канонических расширений: $\mathfrak{B} \in \mathsf{K}$ влечет $\mathfrak{B}^+ = \mathfrak{Cm}\,\mathsf{Uf}(\mathfrak{B}) \in \mathsf{K}$
- Многообразие булевых алгебр с операторами одного типа K называется каноническим, если оно является каноническим классом

А теперь...

А теперь...

...кое-что совсем иное

Модальная логика

Нормальная модальная логика — это множество формул в пропозициональном языке с унарной связкой $\Diamond$, которое содержит все булевы тавтологии, замкнуто относительно правил **MP**, **Sub** и монотонности (если $\varphi \to \psi$ принадлежит логике, и $\Diamond\varphi \to \Diamond\psi$ принадлежит) и содержит следующие формулы:

- $\Diamond p \vee \Diamond q \leftrightarrow \Diamond(p \vee q)$
- $\Diamond\bot \leftrightarrow \bot$

Минимальная нормальная модальная логика **K** — это наименьшая нормальная модальная логика в смысле определения выше.

Модальная логика

Нормальная модальная логика — это множество формул в пропозициональном языке с унарной связкой $\Diamond$, которое содержит все булевы тавтологии, замкнуто относительно правил **MP**, **Sub** и монотонности (если $\varphi \to \psi$ принадлежит логике, и $\Diamond\varphi \to \Diamond\psi$ принадлежит) и содержит следующие формулы:

- $\Diamond p \vee \Diamond q \leftrightarrow \Diamond(p \vee q)$
- $\Diamond\bot \leftrightarrow \bot$

Минимальная нормальная модальная логика **K** — это наименьшая нормальная модальная логика в смысле определения выше.

По факту, модальная логика предлагает синтаксическую характеризацию булевых алгебр с унарными операторами

Некоторые из модальных логик

Рассмотрим следующие формулы:

- **AT** : $p \to \Diamond p$
- **A4** : $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$
- **A1** : $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$, где $\Box = \neg\Box\neg$
- **AL** : $\Diamond p \to \Diamond(p \wedge \neg\Diamond p)$

Некоторые из модальных логик

Рассмотрим следующие формулы:

- $\mathbf{AT}: p \to \Diamond p$
- $\mathbf{A4}: \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$
- $\mathbf{A1}: \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$, где $\Box = \neg\Box\neg$
- $\mathbf{AL}: \Diamond p \to \Diamond(p \wedge \neg\Diamond p)$

Рассмотрим следующие логики:

- $\mathbf{S4} = \mathbf{K} \oplus \mathbf{AT} \oplus \mathbf{A4}$
- $\mathbf{K4}.1 = \mathbf{K} \oplus \mathbf{A4} \oplus \mathbf{A1}$
- $\mathbf{GL} = \mathbf{K} \oplus \mathbf{AL}$

Реляционная семантика

Шкалой Крипке называется пара $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, где $W \neq \varnothing$ and $R \subseteq W^2$. Модель Крипке - это пара из шкалы и оценки $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta \rangle$, где $\vartheta : \mathsf{PV} \to \mathcal{P}(W)$. Связки имеют следующую семантику:

Реляционная семантика

Шкалой Крипке называется пара $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, где $W \neq \varnothing$ and $R \subseteq W^2$. Модель Крипке - это пара из шкалы и оценки $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta \rangle$, где $\vartheta : \mathrm{PV} \to \mathcal{P}(W)$. Связки имеют следующую семантику:

- $\mathcal{M}, x \models p_i \Leftrightarrow x \in \vartheta(p_i)$
- $\mathcal{M}, x \models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \mathcal{M}, x \models \varphi$ или $\mathcal{M}, x \models \psi$
- $\mathcal{M}, x \models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}, x \not\models \varphi$
- $\mathcal{M}, x \models \Diamond\varphi \Leftrightarrow \exists y \in R(x)\, \mathcal{M}, y \models \varphi$

Реляционная семантика

Шкалой Крипке называется пара $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, где $W \neq \varnothing$ and $R \subseteq W^2$. Модель Крипке - это пара из шкалы и оценки $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \vartheta \rangle$, где $\vartheta : \mathrm{PV} \to \mathcal{P}(W)$. Связки имеют следующую семантику:

- $\mathcal{M}, x \models p_i \Leftrightarrow x \in \vartheta(p_i)$
- $\mathcal{M}, x \models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \mathcal{M}, x \models \varphi$ или $\mathcal{M}, x \models \psi$
- $\mathcal{M}, x \models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}, x \not\models \varphi$
- $\mathcal{M}, x \models \Diamond\varphi \Leftrightarrow \exists y \in R(x)\, \mathcal{M}, y \models \varphi$

Формула истинна в модели, если истинна в каждой точки модели. Формула общезначима в шкале, если она истинна в любой модели на этой шкале. Общезначима в классе шкал, если общезначима в каждой шкале класса.

Характеризация шкал через модальные формулы

Пусть $\mathcal{F}$ — это шкала Крипке, тогда

Характеризация шкал через модальные формулы

Пусть $\mathcal{F}$ — это шкала Крипке, тогда

- $\mathcal{F} \models p \to \Diamond p \Leftrightarrow R$ рефлексивно
- $\mathcal{F} \models \Diamond\Diamond p \to \Diamond p \Leftrightarrow R$ транзитивно
- $\mathcal{F} \models \Diamond p \to \Diamond(p \wedge \neg\Diamond p) \Leftrightarrow R$ транзитивно и всякая возрастающая R-цель стабилизируется на конечном шаге
- $\mathcal{F} \models \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p \Leftrightarrow$ выполняется сложное второпорядковое свойство
- $\mathcal{F} \models (\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p) \wedge (\Diamond\Diamond p \to \Diamond p) \Leftrightarrow R$ транзитивно и $\forall x \exists y (xRy \;\&\; \forall z (yRz \Rightarrow y = z))$

Характеризация шкал через модальные формулы

Пусть $\mathcal{F}$ — это шкала Крипке, тогда

- $\mathcal{F} \models p \to \Diamond p \Leftrightarrow R$ рефлексивно
- $\mathcal{F} \models \Diamond\Diamond p \to \Diamond p \Leftrightarrow R$ транзитивно
- $\mathcal{F} \models \Diamond p \to \Diamond(p \wedge \neg\Diamond p) \Leftrightarrow R$ транзитивно и всякая возрастающая R-цель стабилизируется на конечном шаге
- $\mathcal{F} \models \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p \Leftrightarrow$ выполняется сложное второпорядковое свойство
- $\mathcal{F} \models (\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p) \wedge (\Diamond\Diamond p \to \Diamond p) \Leftrightarrow R$ транзитивно и $\forall x \exists y(xRy \,\&\, \forall z(yRz \Rightarrow y = z))$

Теорема
Пусть $\mathcal{L} \in \{\mathbf{S4}, \mathbf{K4}.1, \mathbf{GL}\}$, *тогда* $\mathcal{L} = \mathrm{Log}(\mathrm{Frames}(\mathcal{L}))$

Каноническая шкала

Пусть $\mathcal{L}$ — это нормальная модальная логика, тогда каноническая шкала логики $\mathcal{L}$ — это пара $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} = \langle W_{\mathcal{L}}, R_{\mathcal{L}} \rangle$, где

Каноническая шкала

Пусть $\mathcal{L}$ — это нормальная модальная логика, тогда каноническая шкала логики $\mathcal{L}$ — это пара $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} = \langle W_{\mathcal{L}}, R_{\mathcal{L}} \rangle$, где

- $W_{\mathcal{L}}$ — это множество всех максимальных теорий над логикой $\mathcal{L}$
- $\Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Leftrightarrow \varphi \in \Delta \Leftrightarrow \Diamond\varphi \in \Gamma$
- Каноническая модель = каноническая шкала + каноническая оценка $\vartheta_{\mathcal{L}}(p_i) = \{\Gamma \in W_{\mathcal{L}} \mid p_i \in \Gamma\}$

Каноническая шкала

Пусть $\mathcal{L}$ — это нормальная модальная логика, тогда каноническая шкала логики $\mathcal{L}$ — это пара $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} = \langle W_{\mathcal{L}}, R_{\mathcal{L}} \rangle$, где

- $W_{\mathcal{L}}$ — это множество всех максимальных теорий над логикой $\mathcal{L}$
- $\Gamma R_{\mathcal{L}} \Delta \Leftrightarrow \varphi \in \Delta \Leftrightarrow \Diamond\varphi \in \Gamma$
- Каноническая модель = каноническая шкала + каноническая оценка $\vartheta_{\mathcal{L}}(p_i) = \{\Gamma \in W_{\mathcal{L}} \mid p_i \in \Gamma\}$

Лемма

- $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma$
- $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} \models \mathcal{L}$
- $\mathrm{Log}(\mathcal{F}_{\mathcal{L}}) \subseteq \mathcal{L}$

Каноническая логика

- Логика называется канонической, если имеет место обратное включение $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{Log}(\mathcal{F}_{\mathcal{L}})$
- Логика **S4**, логика топологических булевых алгебр, канонична, так как $R_{\mathbf{S4}}$ — это предпорядок
- Логики **GL** и $\mathbf{M} = \mathbf{K} \oplus \mathbf{AM}$ не каноничны, условия на отношение в канонической шкале нарушаются
- При этом $\mathbf{K4.1} = \mathbf{M} \oplus \mathbf{A4}$ канонична

Две каноничности

- На последних нескольких слайдах мы говорили о каноничности с теоретико-модельной перспективы
- Также у нас есть канонические многообразия, многообразия (как правило)
- Естественно задаться вопросом о том, как две каноничности соотносятся друг с другом
- Нетрудно заметить, что обе каноничности эквалентны друг другу
- Каноническая шкала изоморфна реляционному стоуновскому пространству соотвествующей счетной свободно-порожденной алгебры, каноническое расширение которой — это комплексная алгебра данного пространства
- Максимальные теории $\Leftrightarrow$ ультрафильтры и $R_{\mathcal{L}} \Leftrightarrow R_{\Diamond}$
- Каноническая шкала $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} \Leftrightarrow ((\mathcal{M}_{\mathcal{L}})_{\omega})^{+})_{+}$

Пример неканонического многообразия булевых алгебр с операторами

- Рассмотрим неравенство $\Diamond a \leqslant \Diamond(a \wedge -\Diamond a)$. Модальная алгебра, в которой выполняется это неравенство, называется *алгеброй Магари*
- Нетрудно видеть, что алгебра Магари — это алгебра логики **GL**

Пример неканонического многообразия булевых алгебр с операторами

- Рассмотрим неравенство $\Diamond a \leqslant \Diamond(a \wedge -\Diamond a)$. Модальная алгебра, в которой выполняется это неравенство, называется *алгеброй Магари*
- Нетрудно видеть, что алгебра Магари — это алгебра логики **GL**
- Рассмотрим двойственную шкалу канонического расширения свободной счетной алгебры Магари $\mathcal{M}_\omega$. Данная шкала не будет нетеровой, так как множество $\{-a \vee \Diamond a \mid a \in \mathcal{M}_\omega\}$ содержится в некотором ультрафильтре в $\mathcal{M}_\omega$, что дает рефлексивную точку в $(\mathcal{M}_\omega^+)_+$
- Соответственно, $\mathcal{V}_{\mathbf{GL}}$ не замкнуто относительно канонических расширений.

Пример неканонического многообразия булевых алгебр с операторами

- Рассмотрим неравенство $\Diamond a \leqslant \Diamond(a \wedge -\Diamond a)$. Модальная алгебра, в которой выполняется это неравенство, называется *алгеброй Магари*
- Нетрудно видеть, что алгебра Магари — это алгебра логики **GL**
- Рассмотрим двойственную шкалу канонического расширения свободной счетной алгебры Магари $\mathcal{M}_\omega$. Данная шкала не будет нетеровой, так как множество $\{-a \vee \Diamond a \mid a \in \mathcal{M}_\omega\}$ содержится в некотором ультрафильтре в $\mathcal{M}_\omega$, что дает рефлексивную точку в $(\mathcal{M}_\omega^+)_+$
- Соответственно, $\mathcal{V}_{\mathbf{GL}}$ не замкнуто относительно канонических расширений.
- Еще один пример неканонического неравенства: $\Box\Diamond p \leqslant \Diamond\Box p$. При этом, данное многообразие имеет каноническое подмногообразие, в этом подклассе выполняется неравенство $\Diamond\Diamond p \leqslant \Diamond p$ (оно же многообразие логики $\mathbf{K}4.1$).

Дальнейшие обобщения канонических расширений

Кратко о реляционных семантиках других логик

- Алгебры неклассических логик получаются засчет расширения решеток с операторами и операциям
- Пример: мультипликативное-аддитивное исчисление Ламбека: ограниченная решетка + полугруппа с делениями. Более широко: субструктурные логики
- Интуиционисткая логика: алгебры Гейтинга как частный случай решетки с делениями
- Довольно разумно задаваться аналогичным вопросом о каноничности таких логик и о каноничности соответствующих многообразий

Кратко о реляционных семантиках других логих

- Соотвественно, понятие канонического расширения требует обобщения для решеток с операторами
- Здесь мы переходим от ультрафильтров к простым фильтрам
- Для работы с делениями нужно отказаться от аддитивности и заменить ее на монотонность
- С топологической точки зрения, стоуновская топология также меняется
- Например, если решетка ограниченна и дистрибутивна, то мы живем в так называемых пространствах Пристли, двойственных пространств ограниченных дистрибутивных решеток
- Пример: пространства Эсакиа, двойственные пространства алгебр Гейтинга

Кратко о реляционных семантиках других логик

- Для “решеточных” логик получены достаточно сильные результаты, характеризующие каноничность и элементарность (обобщение теорем Салквиста и Гольдблатта-Томасона)
- Более того, от решеток с монотонными функциями можно перейти частичным порядкам с операциями и обобщить канонические расширения для необязательно “решеточных” логик
- Вопросы каноничности и представимости на данных момент недостаточно глубоко изучены для цилиндрических и реляционных алгебр, булевых алгебр с операторами

Литература i

- J Michael Dunn, Mai Gehrke, and Alessandra Palmigiano.
  Canonical extensions and relational completeness of some substructural logics.
  The Journal of Symbolic Logic, 70(3):713–740, 2005.
- Leo Esakia.
  ***Heyting algebras: Duality theory*, volume 50.**
  Springer, 2019.
- Mai Gehrke and John Harding.
  Bounded lattice expansions.
  Journal of Algebra, 238(1):345–371, 2001.

- Mai Gehrke and Bjarni Jónsson.
  Bounded distributive lattice expansions.
  Mathematica Scandinavica, pages 13–45, 2004.
- Mai Gehrke and Hilary A Priestley.
  Canonical extensions and completions of posets and lattices.
  Reports on Mathematical Logic, 43:133–152, 2008.
- Mai Gehrke and Jacob Vosmaer.
  A view of canonical extension.
  In *International Tbilisi Symposium on Logic, Language, and Computation*, pages 77–100. Springer, 2009.

Литература iii

Robert Goldblatt.
Varieties of complex algebras.
Annals of pure and applied logic, 44(3):173–242, 1989.

Robert Goldblatt.
The mckinsey axiom is not canonical.
The Journal of Symbolic Logic, 56(2):554–562, 1991.

Robert Goldblatt.
***Mathematics of modality*.**
Number 43. Center for the Study of Language (CSLI), 1993.

Robin Hirsch and Ian Hodkinson.
Complete representations in algebraic logic.
The Journal of Symbolic Logic, 62(3):816–847, 1997.

Robin Hirsch and Ian Hodkinson.
Step by step–building representations in algebraic logic.
The Journal of Symbolic Logic, 62(1):225–279, 1997.

Robin Hirsch and Ian Hodkinson.
***Relation algebras by games*.**
Elsevier, 2002.

Литература v

Ian Hodkinson and Szabolcs Mikulás.
On canonicity and completions of weakly representable relation algebras.
The Journal of Symbolic Logic, 77(1):245–262, 2012.

Bjarni Jónsson and Alfred Tarski.
Boolean algebras with operators. part i.
American journal of mathematics, 73(4):891–939, 1951.

Yde Venema.
***Cylindric Modal Logic*, pages 249–269.**
Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013.

И. Б. Шапировский and В. Б. Шехтман.
Современная модальная логика: между математикой и информатикой.

Спасибо!