Задание 1 (на 17.09).

$\boxed{\textbf{1.}}$ Докажите, что в любом графе число вершин нечетной степени четно.

$\boxed{\textbf{2}^*\textbf{.}}$ Вершины связного графа покрашены в черный и белый цвета. Известно, что число черных вершин четно. Докажите, что можно в этом графе выкинуть несколько ребер так, чтобы в получившемся графе все черные вершины имели бы нечетную степень, а все белые вершины имели бы четную степень.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Имеется сетка в виде квадрата $n \times n$. Разрежается разрезать любое ребро сетки. Какое максимальное число разрезов можно сделать так, чтобы сетка все еще не развалилась на две части?

$\boxed{\textbf{4}^*\textbf{.}}$ Докажите, что из произвольного связного графа можно выкинуть вершину и все выходящие из нее ребра так, чтобы оставшийся граф был связным.

$\boxed{\textbf{5.}}$ В связном графе на каждом ребре написали положительное число. Весом остввого дерева мы называем сумму чисел на ребрах, входящих в него. а) Докажите, что минимальное по весу остовное дерево содержит хотя бы одно ребро минимального веса. б) Докажите, что каждое минимальное ребро содержится хотя бы в одном из остовных деревьев минимального веса. в*) Докажите, что остовное дерево, на котором достигается минимум суммы написанных чисел совпадает с одним из остовных деревьев, на котором достигается минимум суммы квадратов написанных чисел.

$\boxed{\textbf{6}^*\textbf{.}}$ В графстве Липшир из усадьбы каждого джентльмена выходит ровно 10 дорог к другим усадьбам. При этом каждый джентльмен может доехать по дорогам до любого другого. Однажды одну из дорог перекопали, и по ней стало невозможно проехать. Докажите, что любой джентльмен по-прежнему может нанести визит вежливости любому другому.

$\boxed{\textbf{7.}}$ Докажите, что в любом графе есть две вершины одинаковой степени.

$\boxed{\textbf{8}^*\textbf{.}}$ Из картона склеен кубик. Двое играют в следующую игру: за один ход разрешается сделать разрез вдоль любого ребра, которое ещё не разрезано. Проигрывает тот, у кого кубик распадается на 2 части. Кто выиграет при правильной игре?