Задание 10 (на 19.11)

$\boxed{\textbf{73.}}$ Докажите, что для каждого $m \geq 0$ матрица чисел Стирлинга первого рода $[s(n,k)]_{0\leq n,k\leq m}$ есть обратная матрица для матрицы чисел Стирлинра второго рода $[S(n,k)]_{0\leq n,k\leq m}$.

$\boxed{\textbf{74.}}$ Докажите, что число разбиений числа n, в котором ни одно из слагаемых не превосходит k, равно числу разбиений $n+k$ на k слагаемых.

$\boxed{\textbf{75.}}$ Помеченное дерево - это дерево, вершины которого пронумерованы. Каждому помеченному дереву можно сопоставить код Прюфера: выбираем лист с наименьшим номером, записываем номер вершины, к которой этот лист прикреплен, удаляем лист и т.д. пока не останется одна вершина (с каким номером?). а) Докажите, что по коду Прюфера помеченное дерево однозначно восстанавливается. б) Сколько существует помеченных деревьев из n вершин?

$\boxed{\textbf{76.}}$ Беспорядком называется перестановка, которая не имеет неподвижных точек ($\forall i \sigma(i) \neq i$). Пусть π_n — это число беспорядков на n элементах. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi_n}{n!}$.

$\boxed{\textbf{77.}}$ Для последовательностей с двумя параметрами рассматривают производящие функции от двух переменных. Найдите замкнутый вид производящкй функции для последовательности C_n^k: $\sum_{n,k} C_n^k x^n y^k$.

Определение. Экспоненциальной производящей функцией для последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$ называется ряд $\frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!}s + \frac{a_2}{2!}s^2 + \dots$

$\boxed{\textbf{78.}}$ Найдите экспоненциальную производящую функцию для последовательностей: а) $1, 1, 1, 1, \dots$; б) $1, -1, 1, -1, 1, -1$; в) $A(s)$ — экпоненциальная производящая функция для последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$, какая будет экспоненциальная производящая функция для последовательности $a_1, a_2, a_3, \dots$?

$\boxed{\textbf{79.}}$ Вычислите экспоненциальную производящую функцию для последовательностей: а) $a_n = q^n$; б) $a_n = n$; в) $a_n = n(n-1)$; г) $a_n = n^2$

$\boxed{\textbf{80.}}$ Вычислите экспоненциальную производящую функцию для чисел Фибоначчи.