

Задание 12 (на 10.12)

- 87.** По каналу связи требуется передать информацию, состоящую из 10 битов. Известно, что максимум один из передаваемых битов исказится. Докажите, что невозможно придумать надежную схему, которая требовала бы передачи всего 13 битов. А как обойтись 14 битами?
- 88.** Найдите максимальное из чисел $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$.
- 89.** Докажите, что а) $\ln((n-1)!) < \int_1^n \ln t dt < \ln n!$; б) $e(\frac{n}{e})^n < n! < en(\frac{n}{e})^n$.
- 90.** Докажите, что $\frac{1}{e\alpha(1-\alpha)^n} 2^{H(\alpha)n} < C_n^{\alpha n} < \frac{n}{e} 2^{H(\alpha)n}$, где $H(\alpha) = -\alpha \log \alpha - (1-\alpha) \log(1-\alpha)$, $0 < \alpha < 1$.
- 91.** В графе n вершин и m ребер. Докажите, что из этого графа можно удалить не более, чем $\frac{m}{k}$ ребер так, чтобы вершины получившегося графа можно было бы правильным образом покрасить в k цветов.
- 92.** $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. а) Докажите, что $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$. б) Докажите, что сумма восьми последовательных чисел Фибоначчи не является числом Фибоначчи. в) Докажите тождество $C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + \dots = F_n$. г) Докажите тождество $F_{m+n} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$.
- 93.** На множестве $\{0, 1\}^n$ введены операции $+$ (покоординатно) и $*$ так, чтобы получилась структура поля. Для $x \in \{0, 1\}^n$ обозначим за $(x)_{\leq m}$ вектор, получающийся из первых m координат x ($1 \leq m \leq n$). Докажите, что для каждого $c \in \{0, 1\}^n$, $c \neq 0$ отображение $x \mapsto (c * x)_{\leq m}$ принимает каждое значение из $\{0, 1\}^m$ по 2^{n-m} раз.