

Задание 5 (на 15.10).

33. Квадратный лист бумаги разбит на сто многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на сто других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот квадрат можно проткнуть ста иголками так, что каждый из двухсот многоугольников будет проткнут по разу.

34*. (Полигамный вариант леммы о девушках). Каждому юноше нравится несколько девушек, причем любому набору из k юношей в совокупности нравится не менее, чем km девушек. Докажите, что каждому юноше можно выделить гарем из m нравившихся ему девушек так, чтобы гаремы не пересекались.

35. На улице Болтунов живут n юношей и n девушек, причем каждый юноша знаком ровно с k девушками, а каждая девушка - ровно с k юношами. а) Докажите, что все юноши и девушки могут одновременно говорить со своими знакомыми по телефону. б) Докажите, что юноши и девушки могут звонить друг другу по телефону так, чтобы за k часов каждый поговорил с каждым из своих знакомых по часу.

36*. Есть n юношей и n девушек. Каждый юноша знает хотя бы одну девушку. Тогда можно некоторых юношей поженить на знакомых девушках так, чтобы женатые юноши не знали незамужних девушек.

37. Из шахматной доски вырезали 7 клеток. Докажите, что на оставшиеся клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей.

38*. В некоторых клетках прямоугольной таблицы стоят звездочки, причем в каждой строке стоит хотя бы одна звездочка. Известно, что строк в таблице больше, чем столбцов. Докажите, что найдется звездочка, в строке которой стоит меньше звездочек, чем в столбце.

39. В графе все вершины степени 3. Докажите, что можно так покрасить ребра в два цвета, что из каждой вершины выходят ребра обоих цветов.

40*. Даны k мальчиков и $2k - 1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков.