## Задание 6 (на 22.10)

**41.** В графе 2000 вершин, степени всех не меньше 1000. Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.

**42.** В шеренгу стоит $mn+1$ человек. Докажите, что найдется либо $m+1$ человек, стоящие по росту справа налево, либо $n+1$ человек, стоящие по росту слева направо.

**43.** Докажите, что в дереве есть совершенное паросочетание, тогда и только тогда, когда при удалении любой вершины в оставшемся графе ровно одна компонента связности состоит из нечетного числа вершин.

**44.** В связном графе 100 вершин и для любых $k \le 50$ вершин найдется не меньше, чем $2k$ вершин, соединенных с одной их этих $k$. Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.

**45.** В связном графе степени всех вершин не менее двух. Докажите, что в нем можно удалить две соединенные ребром вершины без потери связности.

**46.** Докажите, что из любого двусвязного графа, степени всех вершин которого больше двух, можно удалить вершину так, чтобы граф остался двусвязным.

**47.** 30 студентов стоят в очереди в столовой. Время от времени какой-нибудь студент перепрыгивает через своего соседа (перепрыгнуть сразу через двух обессилевший от голода студент не может). Могут ли они вернуться в исходное положение ровно за 2007 прыжков?

**48.** На клетках таблицы $4 \times 4$, кроме правой нижней, расставлены (слева направо в строчках и сверху вниз) квадратики с написанными на них числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14. Разрешается передвинуть на свободную клетку квадратик из любой клетки, примыкающей к ней по стороне. Можно ли с помощью таких операций поменять местами числа 14 и 15?