Задание 7 (на 29.10)

$\boxed{\mathbf{49.}}$ Система образующих группы S_n состоит из транспозиций, докажите, что число этих транспозиций не меньше, чем $n-1$.

$\boxed{\mathbf{50.}}$ **(Транснеравенство)** Известно, что $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n, y_1 \le y_2 \le \dots \le y_n$. Докажите, что $x_1y_n + x_2y_{n-1} + \dots + x_ny_1 \le x_1y_{\sigma(1)} + x_2y_{\sigma(2)} + \dots + x_ny_{\sigma(n)} \le x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$, где σ — перестановка чисел от 1 до n.

$\boxed{\mathbf{51.}}$ $f_0 = f_1 = 1, f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ — последовательность чисел Фибоначчи. Докажите, что любое натуральное число единственным образом представляется в виде суммы различных чисел Фибоначчи, среди которых нет двух с соседним номером.

$\boxed{\mathbf{52.}}$ Докажите, что произведение n подряд идущих натуральных чисел делится на $n!$.

$\boxed{\mathbf{53.}}$ а) p точек (p — простое число) разбивают окружность на p равных дуг. Эти точки окрашиваются в n цветов. Сколько существует существенно различных раскрасок (существенно различными мы считаем раскраски, не переходящие друг в друга при поворотах окружности)? б) Выведите из результата п.а) малую теорему Ферма (для натуральных чисел a, не делящихся на p, $a^{p-1} - 1 \,\vdots\, p$).

$\boxed{\mathbf{54.}}$ а) p точек (p — простое число) разбивают окружность на p равных дуг. Сколько существует ориентированных звездчатых p-угольников (т.е. замкнутых p-звенных ломаных) с вершинами в этих p точках? Мы считаем два p-угольника различными, если они отличаются направлением обхода вершин. б) Выведите из результата п.а) теорему Вильсона: $(p-1)! + 1 \,\vdots\, p$.

$\boxed{\mathbf{55.}}$ Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_n = na_{n-1} + 1$. Докажите, что в полном графе с a_{n+1} вершиной, ребра которого окрашены в n цветов, найдется треугольник с одноцветными сторонами.

$\boxed{\mathbf{56.}}$ Докажите, что среди любых а) 6 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых; б) 10; в) 9 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.