

Задание 8 (на 05.11)

- 57.** Проверьте соотношения для элементарных производящих функций: а) $\sin^2 s + \cos^2 s = 1$; б) $(1+s)^\alpha(1+s)^\beta = (1+s)^{\alpha+\beta}$; в) $\exp(\ln((1-s)^{-1})) = (1-s)^{-1}$; г) $\ln(1+s) = s - \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3 - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}s^n + \dots$; д) $\ln((1-s)^\alpha) = \alpha \ln(1-s)$.
- 58.** Докажите, что степенные ряды $a_1s + a_2s^2 + \dots$, $a_1 \neq 0$ образуют группу относительно операции композиции.
- 59.** Найдите производящие функции для последовательностей: а) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$; б) $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots$.
- 60.** Пусть $A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$. Найдите производящие функции последовательностей а) $a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots$; б) $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots$; в) $a_0, a_1b, a_2b^2, a_3b^3, \dots$; г) $a_0, a_2, a_4, a_6, \dots$.
- 61.** а) Пусть a_n — это число способов выбрать из n элементов набор из r элементов, причем разрешено брать 1 элемент несколько раз, а порядок не важен. Найдите производящую функцию для этой последовательности. И найдите формулу для a_n . б) А если каждый элемент разрешается включать в набор лишь четное число раз?
- 62.** а) Сколько существует ломанных, идущих из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$ шагами $(1, 1)$ и $(1, -1)$? б) Покажите, что число ломанных, из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, пересекающих прямую $y = -1$, равняется числу ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, -2)$. в) Найдите число ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость.
- 63.** а) Посчитайте число способов разбить n -угольник на треугольники, не пересекающимися диагоналями. б) Посчитайте количество способов соединения $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами.