

Задание 9 (на 12.11)

- 64.** а) Найдите количество последовательностей a_1, a_2, \dots, a_{2n} , для которых $a_i = \pm 1$, $a_1 \geq 0$, $a_1 + a_2 \geq 0, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{2n-1} \geq 0$, $a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = 0$. б) Кассир, у которого изначально нет денег продает билеты по 50 рублей. Очередь состоит из $2n$ человек, у половины из которых есть купюра в 100 рублей, а у половины 50 рублей. Сколько существует очередей, при которых кассир сможет дать всем сдачи?
- 65.** Докажите, что число плоских бинарных деревьев с одним корнем и n листьями равняется числу Каталана c_{n-1} .
- 66.** Разбиение числа n называется самосопряженным, если его диаграмма Юнга симметрична относительно диагонали. Докажите, что число самосопряженных разбиений равняется числу разбиений числа n на различные нечетные слагаемые.
- 67.** Докажите, что число разбиений числа n , в которых могут повторяться только нечетные части, равно числу разбиений n в которых нет части, встречающейся более чем три раза.
- 68.** Найдите $(1 + qs)(1 + qs^2)(1 + qs^3) \dots$
- 69.** Берутся всевозможные непустые подмножества из множества чисел $1, 2, 3, \dots, N$. Для каждого подмножества берется величина, обратная к произведению всех его чисел. Найти сумму всех таких обратных величин.
- 70.** Вычислите суммы а) $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k x^k$; б) $\sum_{k=0}^{n-1} k 2^k$; в) $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 2^k$.
- 71.** Для каждого трехзначного числа берем произведение его цифр, а затем эти произведения, вычисленные для всех трехзначных чисел, складываем. Сколько получится?
- 72.** Докажите, что из любых 18 человек есть либо 4 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.