Задачи для промежуточной аттестации

$\boxed{\textbf{1.}}$ Докажите, что в любом графе число вершин нечетной степени четно.

$\boxed{\textbf{2}^*\textbf{.}}$ Вершины связного графа покрашены в черный и белый цвета. Известно, что число черных вершин четно. Докажите, что можно в этом графе выкинуть несколько ребер так, чтобы в получившемся графе все черные вершины имели бы нечетную степень, а все белые вершины имели бы четную степень.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Имеется сетка в виде квадрата $n \times n$. Разрежается разрезать любое ребро сетки. Какое максимальное число разрезов можно сделать так, чтобы сетка все еще не развалилась на две части?

$\boxed{\textbf{4}^*\textbf{.}}$ Докажите, что из произвольного связного графа можно выкинуть вершину и все выходящие из нее ребра так, чтобы оставшийся граф был связным.

$\boxed{\textbf{5.}}$ В связном графе на каждом ребре написали положительное число. Весом оствного дерева мы называем сумму чисел на ребрах, входящих в него. а) Докажите, что минимальное по весу остовное дерево содержит хотя бы одно ребро минимального веса. б) Докажите, что каждое минимальное ребро содержится хотя бы в одном из остовных деревьев минимального веса. в*) Докажите, что остовное дерево, на котором достигается минимум суммы написанных чисел совпадает с одним из остовных деревьев, на котором достигается минимум суммы квадратов написанных чисел.

$\boxed{\textbf{6}^*\textbf{.}}$ В графстве Липшир из усадьбы каждого джентльмена выходит ровно 10 дорог к другим усадьбам. При этом каждый джентльмен может доехать по дорогам до любого другого. Однажды одну из дорог перекопали, и по ней стало невозможно проехать. Докажите, что любой джентльмен по-прежнему может нанести визит вежливости любому другому.

$\boxed{\textbf{7.}}$ Докажите, что в любом графе есть две вершины одинаковой степени.

$\boxed{\textbf{8}^*\textbf{.}}$ Из картона склеен кубик. Двое играют в следующую игру: за один ход разрешается сделать разрез вдоль любого ребра, которое ещё не разрезано. Проигрывает тот, у кого кубик распадается на 2 части. Кто выиграет при правильной игре?

$\boxed{\textbf{9.}}$ Докажите, что если вершины неориентированного графа имеют степень не больше, чем k, то его вершины можно покрасить в $k+1$ цвет так, чтобы концы любого ребра были покрашены в разные цвета.

$\boxed{\textbf{10}^*\textbf{.}}$ Докажите, что если вершины графа имеют степень не больше, чем k, то его вершины можно покрасить в $[k/2]+1$ цвет так, чтобы для каждой вершины не более одного ребра исходило в вершины того же цвета ($[x]$ обозначает целую часть числа x).

$\boxed{\textbf{11.}}$ Докажите, что если в неориентированном графе n вершин и $n-k$ ребер, то в нем как минимум k компонент связности.

$\boxed{\textbf{12}^*\textbf{.}}$ В неориентированном графе $2n$ вершин нет циклов длины 3. Докажите, что число ребер в нем не превосходит n^2, причем оценка n^2 достигается.

$\boxed{\textbf{13.}}$ Существует ли плоский граф, в котором степени всех вершин равняются 5?

$\boxed{\textbf{14}^*\textbf{.}}$ Докажите, что в любом плоском графе есть вершина степени не более 5.

$\boxed{\textbf{15.}}$ Докажите, что на всех ребрах и диагоналях произвольного выпуколого $(2n+1)$-угольника можно расставить стрелочки так, чтобы сумма получившихся векторов равнялась нулю.

$\boxed{\textbf{16}^*\textbf{.}}$ Докажите, что на всех ребрах и диагоналях произвольного правильного n-угольника можно расставить стрелочки так, чтобы сумма получившихся векторов стала равнялась нулю.

$\boxed{\textbf{17.}}$ На плоскости нарисовано несколько окружностей, докажите, что области, на которые эти окружности разбивают плоскость можно покрасить в черный и белые цвета в шахматном порядке.

$\boxed{\textbf{18}^*\textbf{.}}$ Дано изображение плоского Эйлерова графа (степени всех вершин четны). Докажите, что грани этого изображения можно раскрасить в два цвета в шахматном порядке (так, чтобы соседние по ребру грани были бы покрашены в разные цвета).

$\boxed{\textbf{19.}}$ В сильно связном ориентированном графе (из каждой вершины можно добраться в каждую) у каждой вершины входящая степень равна исходящей. Докажите, что сущесвтует цикл, проходящий по каждому ребру ровно 1 раз.

$\boxed{\textbf{20}^*\textbf{.}}$ Докажите, что вершины плоского графа можно правильным образом раскрасить в 5 цветов (так, чтобы ребра соединяли вершины разных цветов).

$\boxed{\textbf{21.}}$ Посчитайте сумму $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$

$\boxed{\textbf{22}^*\textbf{.}}$ Посчитайте сумму $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots$

$\boxed{\textbf{23.}}$ Дан набор натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (не обязательно различных). Пусть b_k - количество чисел в этом наборе, не меньших k. Докажите, что $\sum\limits_k b_k = \sum\limits_i a_i$.

$\boxed{\textbf{24}^*\textbf{.}}$ В классе поровну мальчиков и девочек. Каждый мальчик дружит с четным количеством девочек; Докажите, что можно выбрать группу из нескольких мальчиков так, чтобы с каждой девочкой дружило четное число мальчиков из этой группы.

$\boxed{\textbf{25.}}$ В двудольном графе все вершины имеют степень k. Докажите, что вершин каждого цвета поровну.

$\boxed{\textbf{26}^*\textbf{.}}$ В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными вчера новостями со всеми своими знакомыми Известно, что любая новость становится известной всем жителям поселка. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно всем им сообщить новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям поселка.

$\boxed{\textbf{27.}}$ Автобусные билеты имеют 6-значные номера (номера могут начинаться с нуля). Билет называется счастливым, если суммы первых 3-х цифр его номера равняется сумме последних цифр его номера. Каких билетов больше счастливых или билетов с суммой цифр 27?

$\boxed{\textbf{28}^*\textbf{.}}$ $(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ - перестановка чисел от 1 до $2n$. Назовем перестановку удобной если какие-то два соседних числа в ней различаются ровно на n. Докажите, что среди всех перестановок удобных больше половины.

$\boxed{\textbf{29.}}$ Докажите, что количество способов представить число N в виде не более, чем k натуральных слагаемых, не превосходящих n равняется числу способов представить N в виде не более, чем n натуральных слагаемых, не превосходящих k.

$\boxed{\textbf{30}^*\textbf{.}}$ Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы различных натуральных чисел столькими способоами, сколькими его можно представить в виде суммы (не обязательно различных) нечетных слагаемых. (Например, 6=1+5=2+4=1+2+3, 1+5=3+3=3+1+1+1=1+1+1+1+1+1)

$\boxed{\textbf{31.}}$ Посчитайте количество способов разбить число n на k натуральных слагаемых (разбиения, отличающиеся порядком, считаются различными).

$\boxed{\textbf{32}^*\textbf{.}}$ Посчитайте количество способов разбить число n на k целых неотрицательных слагаемых (разбиения, отличающиеся порядком, считаются различными).