Часть A: Паросочетания

$\boxed{\textbf{1.}}$ Квадратный лист бумаги разбит на сто многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на сто других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот квадрат можно проткнуть ста иголками так, что каждый из двухсот многоугольников будет проткнут по разу.

$\boxed{\textbf{2}^*\textbf{.}}$ (Полигамный вариант леммы о девушках). Каждому юноше нравится несколько девушек, причем любому набору из k юношей в совокупности нравится не менее, чем km девушек. Докажите, что каждому юноше можно выделить гарем из m нравившихся ему девушек так, чтобы гаремы не пересекались.

$\boxed{\textbf{3.}}$ На улице Болтунов живут n юношей и n девушек, причем каждый юноша знаком ровно с k девушками, а каждая девушка - ровно с k юношами. а) Докажите, что все юноши и девушки могут одновременно говорить со своими знакомыми по телефону. б) Докажите, что юноши и девушки могут звонить друг другу по телефону так, чтобы за k часов каждый поговорил с каждым из своих знакомых по часу.

$\boxed{\textbf{4}^*\textbf{.}}$ Есть n юношей и n девушек. Каждый юноша знает хотя бы одну девушку. Тогда можно некоторых юношей поженить на знакомых девушках так, чтобы женатые юноши не знали незамужних девушек.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Из шахматной доски вырезали 7 клеток. Докажите, что на оставшиеся клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей.

$\boxed{\textbf{6}^*\textbf{.}}$ В некоторых клетках прямоугольной таблицы стоят звездочки, причем в каждой строке стоит хотя бы одна звездочка. Известно, что строк в таблице больше, чем столбцов. Докажите, что найдется звездочка, в строке которой стоит меньше звездочек, чем в столбце.

$\boxed{\textbf{7.}}$ В графе все вершины степени 3. Докажите, что можно так покрасить ребра в два цвета, что из каждой вершины выходят ребра обоих цветов.

$\boxed{\textbf{8}^*\textbf{.}}$ Даны k мальчиков и $2k-1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков.

$\boxed{\textbf{9.}}$ В графе 2000 вершин, степени всех не меньше 1000. Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.

$\boxed{\textbf{10.}}$ В шеренгу стоит $mn+1$ человек. Докажите, что найдется либо $m+1$ человек, стоящие по росту справа налево, либо $n+1$ человек, стоящие по росту слева направо.

$\boxed{\textbf{11.}}$ Докажите, что в дереве есть совершенное паросочетание, тогда и только тогда, когда при удалении любой вершины в оставшемся графе ровно одна компонента связности состоит из нечетного числа вершин.

$\boxed{\textbf{12.}}$ В связном графе 100 вершин и для любых $k \leq 50$ вершин найдется не меньше, чем $2k$ вершин, соединенных с одной их этих k. Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.

Часть B: Прочие графы

$\boxed{\textbf{13.}}$ В связном графе степени всех вершин не менее двух. Докажите, что в нем можно удалить две соединенные ребром вершины без потери связности.

$\boxed{\textbf{14.}}$ Докажите, что из любого двусвязного графа, степени всех вершин которого больше двух, можно удалить вершину так, чтобы граф остался двусвязным.

$\boxed{\textbf{15.}}$ Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_n = na_{n-1} + 1$. Докажите, что в полном графе с a_{n+1} вершиной, ребра которого окрашены в n цветов, найдется треугольник с одноцветными сторонами.

$\boxed{\textbf{16.}}$ Докажите, что среди любых а) 6 человек есть либо 3 попарно знакомых, любо 3 попарно незнакомых; б) 10; в) 9 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

$\boxed{\textbf{17.}}$ Докажите, что из любых 18 человек есть либо 4 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

Часть C: Комбинаторика

$\boxed{\textbf{18.}}$ 30 студентов стоят в очереди в столовой. Время от времени какой-нибудь студент перепрыгивает через своего соседа (перепрыгнуть сразу через двух обессилевший от голода студент не может). Могут ли они вернуться в исходное положение ровно за 2007 прыжков?

$\boxed{\textbf{19.}}$ На клетках таблицы 4×4, кроме правой нижней, расставлены (слева направо в строчках и сверху вниз) квадратики с написанными на них числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14. Разрешается передвинуть на свободную клетку квадратик из любой клетки, примыкающей к ней по стороне. Можно ли с помощью таких операций поменять местами числа 14 и 15?

$\boxed{\textbf{20.}}$ Система образующих группы S_n состоит из транспозиций, докажите, что число этих транспозиций не меньше, чем $n-1$.

$\boxed{\textbf{21.}}$ **(Транснеравенство)** Известно, что $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n, y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$. Докажите, что $x_1y_n + x_2y_{n-1} + \dots + x_ny_1 \leq x_1y_{\sigma(1)} + x_2y_{\sigma(2)} + \dots + x_ny_{\sigma(n)} \leq x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$, где σ — перестановка чисел от 1 до n.

$\boxed{\textbf{22.}}$ $f_0 = f_1 = 1, f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ — последовательность чисел Фибоначчи. Докажите, что любое натуральное число единственным образом представляется в виде суммы различных чисел Фибоначчи, среди которых нет двух с соседним номером.

$\boxed{\textbf{23.}}$ Докажите, что произведение n подряд идущих натуральных чисел делится на $n!$.

24. а) p точек (p — простое число) разбивают окружность на p равных дуг. Эти точки окрашиваются в n цветов. Сколько существует существенно различных раскрасок (существенно различными мы считаем раскраски, не переходящие друг в друга при поворотах окружности)? б) Выведите из результата п.а) малую теорему Ферма (для натуральных чисел a, не делящихся на p, $a^{p-1} - 1 \vdots p$).

25. а) p точек (p — простое число) разбивают окружность на p равных дуг. Сколько существует ориентированных звездчатых p-угольников (т.е. замкнутых p-звенных ломаных) с вершинами в этих p точках? Мы считаем два p-угольника различными, если они отличаются направлением обхода вершин. б) Выведите из результата п.а) теорему Вильсона: $(p-1)! + 1 \vdots p$.

26. а) Сколько существует ломанных, идущих из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$ шагами $(1,1)$ и $(1,-1)$? б) Покажите, что число ломанных, из $(0,0)$ в $(2n,0)$, пересекающих прямую $y=-1$, равняется числу ломанных из $(0,0)$ в $(2n,-2)$. в) Найдите число ломанных из $(0,0)$ в $(2n,0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость.

27. а) Посчитайте число способов разбить n-угольник на треугольники, не пересекающимися диагоналями. б) Посчитайте количество способов соединения $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами.

28. а) Найдите количество последовательностей $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, для которых $a_i = \pm 1$, $a_1 \geq 0, a_1 + a_2 \geq 0, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1} \geq 0, a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = 0$. б) Кассир, у которого изначально нет денег продает билеты по 50 рублей. Очередь состоит из $2n$ человек, у половины из которых есть купюра в 100 рублей, а у половины 50 рублей. Сколько существует очередей, при которых кассир сможет дать всем сдачи?

29. Докажите, что число плоских бинарных деревьвев с одним корнем и n листьями равняется числу Каталана c_{n-1}.

30. Разбиение числа n называется самосопряженным, если его диаграма Юнга симметрична относительно диагонали. Докажите, что число самосопряженных разбиений равняется числу разбиений числа n на различные нечетные слагаемые.

Часть D: Производящие функции

31. Проверьте соотношения для элементарных производящих функций: а) $\sin^2 s + \cos^2 s = 1$; б) $(1+s)^\alpha (1+s)^\beta = (1+s)^{\alpha+\beta}$; в) $\exp(\ln((1-s)^{-1})) = (1-s)^{-1}$; г) $\ln(1+s) = s - \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}s^n + \ldots$; д) $\ln((1-s)^\alpha) = \alpha \ln(1-s)$.

32. Докажите, что степенные ряды $a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$, $a_1 \neq 0$ образуют группу относительно операции композиции.

33. Найдите производящие функции для последовательсностей: а) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$; б) $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \ldots$.

34. Пусть $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$. Найдите производящие функции последовательностей а) $a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots$; б) $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots$; в) $a_0, a_1 b, a_2 b^2, a_3 b^3, \ldots$; г) $a_0, a_2, a_4, a_6, \ldots$.

35. а) Пусть a_n — это число способов выбрать из n элементов набор из r элементов, причем разрешено брать 1 элемент несколько раз, а порядок не важен. Найдите производящую функцию для этой последовательности. И найдите формулу для a_n. б)А если каждый элемент разрешается включать в набор лишь четное число раз?

36. Докажите, что число разбиений числа n, в которых могут повторяться только нечетные части, равно числу разбиений n в которых нет части, встречающейся более чем три раза.

37. Берутся всевозможные непустые подмножества из множества чисел $1, 2, 3, ..., N$. Для каждого подмножества берчтся величина, обратная к произведению всех его чисел. Найти сумму всех таких обратных величин.

38. Вычислите суммы а) $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k x^k$; б) $\sum_{k=0}^{n-1} k 2^k$; в) $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 2^k$.

39. Для каждого трчхзначного числа берчм произведение его цифр, а затем эти произведения, вычисленные для всех трчхзначных чисел, складываем. Сколько получится?