Часть E: Производящие функции.

1. Для последовательностей с двумя параметрами рассматривают производящие функции от двух переменных. Найдите замкнутый вид производящкй функции для последовательности C_n^k: $\sum_{n,k} C_n^k x^n y^k$.

Определение. Экспоненциальной производящей функцией для последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$ называется ряд $\frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!}s + \frac{a_2}{2!}s^2 + \dots$

2. Найдите экспоненциальную производящую функцию для последовательностей: а) $1, 1, 1, 1, \dots$; б) $1, -1, 1, -1, 1, -1$; в) $A(s)$ — экпоненциальная производящая функция для последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$, какая будет экспоненциальная производящая функция для последовательности $a_1, a_2, a_3, \dots$?

3. Вычислите экспоненциальную производящую функцию для последовательностей: а) $a_n = q^n$; б) $a_n = n$; в) $a_n = n(n-1)$; г) $a_n = n^2$

4. Вычислите экспоненциальную производящую функцию для чисел Фибоначчи.

5. $a_0 = 6, a_1 = 4$, $a_{n+2} = \frac{a_n - 3a_{n+1}}{2}$. Найдите формулу для общего члена последовательности a_n.

6. Фаном называется граф, состоящий из вершин $\{0, 1, 2\ , \dots, n\}$, вершина 0 соединена ребром со всеми остальными вершинами, кроме того вершина i соединена ребром с вершиной $i+1$ для всех $1 \le i \le n-1$. Пусть f_n — это количество остовных деревьев фана. а) Докажите, что $f_n = 2f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + \dots + f_1 + 1$; б) Найдите производящую функцию последовательности f_n; в) Найдите f_n.

7. Найдите количество способов разбить доску $3 \times n$ на доминошки. Указание: найти рекуррентное соотношение и производящую функцию.

8. Решите рекуррентное соотношение: $g_0 = 1, g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + 3g_{n-3} + \dots + ng_0$.

Часть F: Комбинаторные методы (стандартные)

9. Докажите, что число разбиений числа n, в котором ни одно из слагаемых не превосходит k, равно числу разбиений $n+k$ на k слагаемых.

10. Беспорядком называется перестановка, которая не имеет неподвижных точек ($\forall i \sigma(i) \ne i$). Пусть π_n — это число беспорядков на n элементах. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi_n}{n!}$.

11. Найдите максимальное из чисел $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$.

12. Докажите, что а) $\ln((n-1)!) < \int_1^n \ln t dt < \ln n!$; б) $e(\frac{n}{e})^n < n! < en(\frac{n}{e})^n$.

13. Докажите, что $\frac{1}{e\alpha(1-\alpha)n} 2^{H(\alpha)n} < C_n^{\alpha n} < \frac{n}{e} 2^{H(\alpha)n}$, где $H(\alpha) = -\alpha \log \alpha - (1-\alpha)\log(1-\alpha)$, $0 < \alpha < 1$.

14. $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. а) Докажите, что $F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$. б) Докажите, что сумма восьми последовательных чисел Фибоначчи не является числом Фибоначчи. в) Докажите тождество $C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + \dots = F_n$. г) Докажите тождество $F_{m+n} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$.

Часть G: Комбинаторные методы (идейные)

15. Докажите, что для каждого $m \ge 0$ матрица чисел Стирлинга первого рода $[s(n,k)]_{0 \le n,k \le m}$ есть обратная матрица для матрицы чисел Стирлинра второго рода $[S(n,k)]_{0 \le n,k \le m}$.

16. Помеченное дерево - это дерево, вершины которого пронумерованы. Каждому помеченному дереву можно сопоставить код Прюфера: выбираем лист с наименьшим номером, записываем номер вершины, к которой этот лист прикреплен, удаляем лист и т.д. пока не останется одна вершина (с каким номером?). а) Докажите, что по коду Прюфера помеченное дерево однозначно восстанавливается. б) Сколько существует помеченных деревьев из n вершин?

17*. В полном n-вершинном графе красят ребра так, что любые два ребра с общей вершиной окрашивались различными цветами. Какое наименьшее число цветов нужно для такой раскраски?

18. По каналу связи требуется передать информацию, состоящую из 10 битов. Известно, что максимум один из передаваемых битов исказится. Докажите, что невозможно придумать надежную схему, которая требовала бы передачи всего 13 битов. А как обойтись 14 битами?

19. На множестве $\{0,1\}^n$ введены операции $+$ (покоординатно) и $*$ так, чтобы получилась структура поля. Для $x \in \{0,1\}^n$ обозначим за $(x)_{\le m}$ вектор, получающийся из первых m координат x ($1 \le m \le n$). Докажите, что для каждого $c \in \{0,1\}^n, c \ne 0$ отображение $x \mapsto (c * x)_{\le m}$ принимает каждое значение из $\{0,1\}^m$ по 2^{n-m} раз.

20. Пусть $n \ge 2$, $H(V,E)$ — n-однородный гиперграф с числом ребер, равным $|E| = 4^{n-1}$. Покажите, что существует такая раскраска множества вершин V в 4 цвета, что ни одно ребро не является монохроматическим.

21. В графе n вершин и m ребер. Докажите, что из этого графа можно удалить не более, чем $\frac{m}{k}$ ребер так, чтобы вершины получившегося графа можно было бы правильным образом покрасить в k цветов.