

Задачи по логическим исчислениям

ML L1. Метод резолюций для исчисления высказываний — это способ показать, что данная формула в КНФ является невыполнимой. Резольвентой двух дизъюнктов $(l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_{n-1} \vee x)$ и $(l'_1 \vee l'_2 \vee \dots \vee l'_{m-1} \vee \neg x)$ называется дизъюнкт $(l_1 \vee \dots \vee l_{n-1} \vee l'_1 \vee \dots \vee l'_{m-1})$. Выводом в методе резолюций называется последовательность дизъюнктов, каждый из которых либо является дизъюнктом исходной формулы, либо является резольвентой двух предыдущих, последний дизъюнкт в выводе — это пустой дизъюнкт. а) Покажите, что если у формулы существует вывод, то она невыполнимая. б) Покажите, что если формула невыполнимая, то у нее существует вывод из $O(2^n)$ числа дизъюнктов, где n — это число переменных.

ML L2. Рассмотрим резолюционную систему доказательств для исчисления предикатов. Система доказывает, что замкнутая формула является противоречивой следующим образом: формула приводится в предваренную нормальную форму, затем проводится скулемизация (избавляемся от функциональных символов). Получается формула $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \varphi$, приводим φ в КНФ, пусть A — это множество полученных клозов. Опровержением полученной формулы является список дизъюнктов, заканчивающийся пустым дизъюнктом, каждый дизъюнкт из списка либо принадлежит A , либо получается подстановкой замкнутого терма вместо переменной из одного из предыдущих дизъюнктов, либо является резольвентой двух предыдущих. Докажите, что такая система корректна и полна.

ML L3. Покажите, что в сигнатуре $(\mathbb{Z}, =, <)$ предикат $y = x + 1$ невыразим с помощью бескванторной формулы.

ML L4. Покажите, что $(\mathbb{Z}, =, <, S, 0)$ допускает элиминацию кванторов.