

### Задание 1 (на 10.09).

- CS 1.** Докажите, что в любом графе число вершин нечетной степени четно.
- CS 2.** Вершины связного графа покрашены в черный и белый цвета. Известно, что число черных вершин четно. Докажите, что можно в этом графе выкинуть несколько ребер так, чтобы в получившемся графе все черные вершины имели бы нечетную степень, а все белые вершины имели бы четную степень.
- CS 3.** Имеется сетка в виде квадрата  $n \times n$ . Разрежается разрезать любое ребро сетки. Какое максимальное число разрезов можно сделать так, чтобы сетка все еще не развалилась на две части?
- CS 4.** Докажите, что из произвольного связного графа можно выкинуть вершину и все выходящие из нее ребра так, чтобы оставшийся граф был связным.
- CS 5.** В связном графе на каждом ребре написали положительное число. Весом остовного дерева мы называем сумму чисел на ребрах, входящих в него. а) Докажите, что минимальное по весу остовное дерево содержит хотя бы одно ребро минимального веса. б) Докажите, что каждое минимальное ребро содержится хотя бы в одном из остовных деревьев минимального веса. в) Докажите, что остовное дерево, на котором достигается минимум суммы написанных чисел совпадает с одним из остовных деревьев, на котором достигается минимум суммы квадратов написанных чисел.
- CS 6.** В связном графе степени всех вершин равняются 10. Докажите, что этот граф останется связным, если из него удалить любое ребро.
- CS 7.** Докажите, что в любом графе есть две вершины одинаковой степени.
- CS 8\*.** В связном графе есть остовное дерево, в котором  $k$  висячих вершин и есть остовное дерево, в котором  $m$  висячих вершин. Докажите, что для любого числа  $\ell$  между  $k$  и  $m$  в этом графе найдется остовное дерево, в котором  $\ell$  висячих вершин.