

### Задание 10 (на 18.11)

**CS 73.** Докажите, что число плоских бинарных деревьев с одним корнем (корень — это вершина степени 1) и  $n$  листьями равняется числу Каталана  $c_{n-1}$ .

**CS 74.** Берутся всевозможные непустые подмножества нечетной мощности из множества чисел  $1, 2, 3, \dots, N$ . Для каждого такого подмножества нечетной мощности берется величина, обратная к произведению всех его чисел. Найти сумму всех таких обратных величин.

**CS 75.** Докажите, что число разбиений числа  $n$ , в которых могут повторяться только нечетные части, равно числу разбиений  $n$  в которых нет части, встречающейся более чем три раза.

**CS 76.** Фаном называется граф, состоящий из вершин  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ , вершина 0 соединена ребром со всеми остальными вершинами, кроме того вершина  $i$  соединена ребром с вершиной  $i + 1$  для всех  $1 \leq i \leq n - 1$ . Пусть  $f_n$  — это количество остовных деревьев фана. а) Докажите, что  $f_n = 2f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + \dots + f_1 + 1$ ; б) Найдите производящую функцию последовательности  $f_n$ ; в) Найдите  $f_n$ .

**CS 77.** Найдите количество способов разбить доску  $3 \times n$  на доминошки. Указание: найти рекуррентное соотношение и производящую функцию.

**CS 78.** Решите рекуррентное соотношение:  $g_0 = 1, g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + 3g_{n-3} + \dots + ng_0$ .

**Определение.** Экспоненциальной производящей функцией для последовательности  $a_0, a_1, a_2, \dots$  называется ряд  $\frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!}s + \frac{a_2}{2!}s^2 + \dots$

**CS 79.** Найдите экспоненциальную производящую функцию для последовательностей: а)  $1, 1, 1, 1, \dots$ ; б)  $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ ; в)  $A(s)$  — экспоненциальная производящая функция для последовательности  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , какая будет экспоненциальная производящая функция для последовательности  $a_1, a_2, a_3, \dots$ ? Вычислите экспоненциальную производящую функцию для последовательностей: г)  $a_n = q^n$ ; д)  $a_n = n$ ; е)  $a_n = n(n - 1)$ ; ж)  $a_n = n^2$

**CS 80.** Вычислите экспоненциальную производящую функцию для чисел Фибоначчи.

**CS22.** В сильно связном ориентированном графе (сильно связный граф, значит из любой вершины можно добраться до любой другой) между любыми двумя вершинами существует максимум одно ребро, кроме того из любой вершины **выходит** по крайней мере два ребра. Докажите, что в таком графе можно удалить вершину без потери сильной связности.

**CS44.** В связном графе 100 вершин и для любых  $k \leq 50$  вершин найдется не меньше, чем  $2k$  вершин, соединенных с одной из этих  $k$ . Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.

**CS45.** Докажите, что из любого двусвязного графа, степени всех вершин которого больше двух, можно удалить вершину так, чтобы граф остался двусвязным.

**CS72.** Таблицей инверсий перестановки  $\sigma \in S_n$  называется кортеж чисел  $\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n)$ , где  $\tau(i)$  — это количество чисел  $j < i$ , что  $\sigma(j) > \sigma(i)$ . а) Покажите, что любой кортеж  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , в котором  $0 \leq t_i \leq i - 1$  является таблицей инверсии какой-то перестановки. б) Покажите, что каждое число от 0 до  $n! - 1$  единственным образом представляется в виде  $a_0 0! + a_1 1! + a_2 2! + \dots + a_{n-1} (n - 1)!$ , где  $0 \leq a_i \leq i$ .