

Задание 11 (на 25.11)

- CS 81.** Докажите, что степенные ряды $a_1s + a_2s^2 + \dots$, $a_1 \neq 0$ образуют группу относительно операции композиции.
- CS 82.** Найдите производящую функцию числа разбиений на k слагаемых.
- CS 83.** Докажите, что $(1 + s + s^2 + \dots + s^9)(1 + s^{10} + \dots + s^{90})(1 + s^{100} + \dots + s^{900}) \dots = \frac{1}{1-s}$.
- CS 84.** Докажите тождества Гаусса: а) $\frac{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)\dots}{(1-s)(1-s^3)(1-s^5)\dots} = 1 - 2s + 3s^4 - 2s^9 + \dots$ б) $\frac{(1-s^2)(1-s^4)(1-s^6)\dots}{(1-s)(1-s^3)(1-s^5)\dots} = 1 + s + s^3 + s^6 + s^{10} + \dots$
- CS 85.** Докажите, что натуральное число n может быть представлено в виде суммы меньших натуральных слагаемых $2^{n-1} - 1$ способом, если два представления, отличающиеся порядком слагаемых считать различными.
- CS 86.** Докажите, что для каждого $m \geq 0$ матрица чисел Стирлинга первого рода $[s(n, k)]_{0 \leq n, k \leq m}$ есть обратная матрица для матрицы чисел Стирлинга второго рода $[S(n, k)]_{0 \leq n, k \leq m}$.
- CS 87.** Помеченное дерево - это дерево, вершины которого пронумерованы. Каждому помеченному дереву можно сопоставить код Прюфера: выбираем лист с наименьшим номером, записываем номер вершины, к которой этот лист прикреплен, удаляем лист и т.д. пока не останется одна вершина (с каким номером?). а) Докажите, что по коду Прюфера помеченное дерево однозначно восстанавливается. б) Сколько существует помеченных деревьев из n вершин? в) Постройте биекцию между помеченными деревьями с двумя выделенными вершинами (одну вершину называем началом, другую концом, причем начало и конец могут совпадать) и отображениями из $\{1, 2, \dots, n\}$ в $\{1, 2, \dots, n\}$.
- CS 88.** Для последовательностей с двумя параметрами рассматривают производящие функции от двух переменных. Найдите замкнутый вид производящей функции для последовательности C_n^k : $\sum_{n,k} C_n^k x^n y^k$.
-
- CS22.** В сильно связном ориентированном графе (сильно связный граф, значит из любой вершины можно добраться до любой другой) между любыми двумя вершинами существует максимум одно ребро, кроме того из любой вершины **выходит** по крайней мере два ребра. Докажите, что в таком графе можно удалить вершину без потери сильной связности.
- CS44.** В связном графе 100 вершин и для любых $k \leq 50$ вершин найдется не меньше, чем $2k$ вершин, соединенных с одной из этих k . Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.
- CS45.** Докажите, что из любого двусвязного графа, степени всех вершин которого больше двух, можно удалить вершину так, чтобы граф остался двусвязным.