Задание 12 (на 02.12)

CS 89. По каналу связи требуется передать информацию, состоящую из 10 битов. Известно, что максимум один из передаваемых битов исказится. Докажите, что невозможно придумать надежную схему, которая требовала бы передачи всего 13 битов. А как обойтись 14 битами?

CS 90. Пусть $n \geq 2$, $H(V, E)$ — n-однородный (Ребра — это n-вершинные подмножества V) гиперграф с числом ребер, равным $|E| = 4^{n-1}$. Покажите, что существует такая раскраска множества вершин V в 4 цвета, что ни одно ребро не является монохроматическим.

CS 91. Пусть $n \geq 4$, $H(V, E)$ — n-однородный (Ребра — это n-вершинные подмножества V) гиперграф с числом ребер, равным $|E| \leq \frac{4^{n-1}}{3^n}$. Покажите, что существует такая раскраска множества вершин V в 4 цвета, что в каждом ребре присутствуют все 4 цвета.

CS 92. Докажите, что если $C_n^k(1-2^{-k})^{n-k} < 1$, то существует турнир из n команд, в котором для любых k команд существует команда, которая выиграла у всех этих k.

CS 93. Рассмотрим множество всех пар (A, B) непересекающихся k-элементных подмножеств $\{1, 2, \dots, n\}$. Множество Y отделяет пару (A, B), если $A \subseteq Y$ и $B \cap Y = \emptyset$. Докажите, что существует $l = 3k4klnn$ множеств, что каждая пара (A, B) отделима хотя бы одним из них.

CS 94. Докажите, что если в графе степень каждой вершины как минимум d, то в этом графе есть вершинное покрытие размера не больше, чем $n\frac{1+\ln(d+1)}{d+1}$.

CS 95. Докажите, что каждое множество, состоящее из n отличных от нуля вещественных чисел, содержит подмножество A мощности строго большей, чем $\frac{n}{3}$, в котором нет троек $a_1, a_2, a_3 \in A$, удовлетворяющих равенству $a_1 + a_2 = a_3$.

CS84. Правильное условие! Докажите тождества Гаусса: а) $\frac{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)\dots}{(1+s)(1+s^2)(1+s^3)\dots} = 1 - 2s + 2s^4 - 2s^9 + \dots$ б) $\frac{(1-s^2)(1-s^4)(1-s^6)\dots}{(1-s)(1-s^3)(1-s^5)\dots} = 1 + s + s^3 + s^6 + s^{10} + \dots$

CS22. В сильно связном ориентированном графе (сильно связный граф, значит из любой вершины можно добраться до любой другой) между любыми двумя вершинами существует максимум одно ребро, кроме того из любой вершины **выходит** по крайне мере два ребра. Докажите, что в таком графе можно удалить вершину без потери сильной связности.

CS45. Докажите, что из любого двусвязного графа, степени всех вершин которого больше двух, можно удалить вершину так, чтобы граф остался двусвязным.