

Задание 13 (на 09.12)

CS 96. На множестве $\{0, 1\}^n$ введены операции $+$ (покоординатно) и $*$ так, чтобы получилась структура поля. Для $x \in \{0, 1\}^n$ обозначим за $(x)_{\leq m}$ вектор, получающийся из первых m координат x ($1 \leq m \leq n$). Докажите, что для каждого $c \in \{0, 1\}^n$, $c \neq 0$ отображение $x \mapsto (c * x)_{\leq m}$ принимает каждое значение из $\{0, 1\}^m$ по 2^{n-m} раз.

CS 97. Беспорядком называется перестановка, которая не имеет неподвижных точек ($\forall i \sigma(i) \neq i$). Пусть π_n — это число беспорядков на n элементах. Найдите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi_n}{n!}$.

CS 98. В матрице $2n \times 2n$ стоят нули на главной диагонали, а во всех остальных строчках стоят ± 1 . Докажите, что определитель этой матрицы отличен от нуля.

CS 99. Докажите, что для любых конечных множеств $I \subseteq J$ выполняется $\sum_{I \subseteq K \subseteq J} (-1)^{|K \setminus I|} = \begin{cases} 1, & \text{если } I = J \\ 0, & \text{если } I \neq J \end{cases}$

CS 95. Докажите, что каждое множество, состоящее из n отличных от нуля вещественных чисел, содержит подмножество A мощности строго большей, чем $\frac{n}{3}$, в котором нет троек $a_1, a_2, a_3 \in A$, удовлетворяющих равенству $a_1 + a_2 = a_3$.

CS 84. Докажите тождества Гаусса: а) $\frac{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)\dots}{(1+s)(1+s^2)(1+s^3)\dots} = 1 - 2s + 2s^4 - 2s^9 + \dots$ б) $\frac{(1-s^2)(1-s^4)(1-s^6)\dots}{(1-s)(1-s^3)(1-s^5)\dots} = 1 + s + s^3 + s^6 + s^{10} + \dots$

CS 22. В сильно связном ориентированном графе (сильно связный граф, значит из любой вершины можно добраться до любой другой) между любыми двумя вершинами существует максимум одно ребро, кроме того из любой вершины **выходит** по крайней мере два ребра. Докажите, что в таком графе можно удалить вершину без потери сильной связности.

CS 45. Докажите, что из любого двусвязного графа, степени всех вершин которого больше двух, можно удалить вершину так, чтобы граф остался двусвязным.