Задание 3.

$\boxed{\textbf{CS 17.}}$ Дано изображение плоского Эйлерова графа (степени всех вершин четны). Докажите, что грани этого изображения можно раскрасить в два цвета в шахматном порядке (так, чтобы соседние по ребру грани были бы покрашены в разные цвета).

$\boxed{\textbf{CS 18.}}$ В сильно связном ориентированном графе (из каждой вершины можно добраться в каждую) у каждой вершины входящая степень равна исходящей. Докажите, что сущесвтует цикл, проходящий по каждому ребру ровно 1 раз.

$\boxed{\textbf{CS 19.}}$ а) Посчитайте сумму $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$ б) Посчитайте сумму $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots$

$\boxed{\textbf{CS 20.}}$ Дан набор натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (не обязательно различных). Пусть b_k - количество чисел в этом наборе, не меньших k. Докажите, что $\sum\limits_k b_k = \sum\limits_i a_i$.

$\boxed{\textbf{CS 21.}}$ В классе поровну мальчиков и девочек. Каждый мальчик дружит с четным количеством девочек; Докажите, что можно выбрать группу из нескольких мальчиков так, чтобы с каждой девочкой дружило четное число мальчиков из этой группы.

$\boxed{\textbf{CS 22.}}$ В сильно связном ориентированном графе (сильно связный граф, значит из любой вершины можно добраться до любой другой) между любыми двумя вершинами существует максимум одно ребро, кроме того из любой вершины **выходит** по крайне мере два ребра. Докажите, что в таком графе можно удалить вершину без потери сильной связности.

$\boxed{\textbf{CS 23.}}$ Докажите, что если простой связный граф G имеет ровно две вершины при удалении которых, граф не теряет связность, то G – это путь.

$\boxed{\textbf{CS 24.}}$ Докажите, что из любого графа можно выкинуть не более половины ребер так, чтобы он превратился в двудольный.