

Задание 5 (на 15.10).

CS 33. (Полигамный вариант леммы о девушках). Каждому юноше нравится несколько девушек, причем любому набору из k юношей в совокупности нравится не менее, чем kt девушек. Докажите, что каждому юноше можно выделить гарем из t нравившихся ему девушек так, чтобы гаремы не пересекались.

CS 34. На улице Болтунов живут n юношей и n девушек, причем каждый юноша знаком ровно с k девушками, а каждая девушка - ровно с k юношами. а) Докажите, что все юноши и девушки могут одновременно говорить со своими знакомыми по телефону. б) Докажите, что юноши и девушки могут звонить друг другу по телефону так, чтобы за k часов каждый поговорил с каждым из своих знакомых по часу.

CS 35. Есть n юношей и n девушек. Каждый юноша знает хотя бы одну девушку. Тогда можно некоторых юношей поженить на знакомых девушках так, чтобы женатые юноши не знали незамужних девушек.

CS 36. В некоторых клетках прямоугольной таблицы стоят звездочки, причем в каждой строке стоит хотя бы одна звездочка. Известно, что строк в таблице больше, чем столбцов. Докажите, что найдется звездочка, в строке которой стоит меньше звездочек, чем в столбце.

CS 37. Даны k мальчиков и $2k - 1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков.

CS 38. В графе все вершины степени 3. Докажите, что можно так покрасить ребра в два цвета, что из каждой вершины выходят ребра обоих цветов.

CS 39. Через $k(G)$ или просто k обозначается вершинная связность графа G (т.е. такое минимальное число, что при удалении каких-то k вершин граф теряет связность. Граф состоящий из одной вершины будем считать несвязным). Аналогично определяется $k'(G)$, как реберная связность графа. Докажите, что в 3-регулярном графе $k = k'$.

CS 40. В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узанными вчера новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что любая новость становится известной всем жителям поселка. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно всем им сообщить новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям поселка.