

### Задание 6 (на 22.10)

- CS 41.** В графе 2000 вершин, степени всех не меньше 1000. Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.
- CS 42.** В шеренгу стоит  $mn + 1$  человек. Докажите, что найдется либо  $m + 1$  человек, стоящие по росту справа налево, либо  $n + 1$  человек, стоящие по росту слева направо.
- CS 43.** Докажите, что в дереве есть совершенное паросочетание, тогда и только тогда, когда при удалении любой вершины в оставшемся графе ровно одна компонента связности состоит из нечетного числа вершин.
- CS 44.** В связном графе 100 вершин и для любых  $k \leq 50$  вершин найдется не меньше, чем  $2k$  вершин, соединенных с одной их этих  $k$ . Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.
- CS 45.** Докажите, что из любого двусвязного графа, степени всех вершин которого больше двух, можно удалить вершину так, чтобы граф остался двусвязным.
- CS 46.** Найдите максимальное из чисел  $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ .
- CS 47.** Докажите, что а)  $\ln((n-1)!) < \int_1^n \ln t dt < \ln n!$ ; б)  $e(\frac{n}{e})^n < n! < en(\frac{n}{e})^n$ . в) Докажите, что  $\frac{1}{e\alpha(1-\alpha)^n} 2^{H(\alpha)n} < C_n^{\alpha n} < \frac{n}{e} 2^{H(\alpha)n}$ , где  $H(\alpha) = -\alpha \log \alpha - (1-\alpha) \log(1-\alpha)$ ,  $0 < \alpha < 1$ .
- CS 48.** Докажите, что произведение  $n$  подряд идущих чисел делится на  $n!$ .
- 

- CS40.** В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узанными вчера новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что любая новость становится известной всем жителям поселка. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно всем им сообщить новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям поселка.
- CS22.** В сильно связном ориентированном графе (сильно связный граф, значит из любой вершины можно добраться до любой другой) между любыми двумя вершинами существует максимум одно ребро, кроме того из любой вершины **выходит** по крайней мере два ребра. Докажите, что в таком графе можно удалить вершину без потери сильной связности.