Задание 7. (На 29.10.09)

$\boxed{\textbf{CS 49.}}$ Покажите, что если группа S_n порождена несколькими транспозициями, то их количество не менее $n-1$.

$\boxed{\textbf{CS 50.}}$ 30 студентов стоят в очереди в столовой. Время от времени какой-нибудь студент перепрыгивает через своего соседа (перепрыгнуть сразу через двух обессилевший от голода студент не может). Могут ли они вернуться в исходное положение ровно за 2007 прыжков?

$\boxed{\textbf{CS 51.}}$ На клетках таблицы 4×4, кроме правой нижней, расставлены (слева направо в строчках и сверху вниз) квадратики с написанными на них числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14. Разрешается передвинуть на свободную клетку квадратик из любой клетки, примыкающей к ней по стороне. Можно ли с помощью таких операций поменять местами числа 14 и 15?

$\boxed{\textbf{CS 52.}}$ **(Транснеравенство)** Известно, что $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n, y_1 \le y_2 \le \dots \le y_n$. Докажите, что $x_1y_n + x_2y_{n-1} + \dots + x_ny_1 \le x_1y_{\sigma(1)} + x_2y_{\sigma(2)} + \dots + x_ny_{\sigma(n)} \le x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$, где σ — перестановка чисел от 1 до n.

$\boxed{\textbf{CS 53.}}$ **(Хроматический многочлен графа)**. Пусть $\chi_G(t)$ - это количество способов правильно покрасить вершины графа в t цветов. (Раскраска называется правильной, если любые две вершины, соединенные ребром, покрашены в разные цвета.)

а) Покажите, что если граф G — это граф с n вершинами и без ребер, то $\chi_G(t) = t^n$.

б) покажите, что если граф G — это дерево на n вершинах, то $\chi_G(t) = t(t-1)^{n-1}$.

в) покажите, что если граф G - это полный граф на n вершинах, то $\chi_G(t) = t(t-1)(t-2)\dots(t-n+1)$.

Естественно возникает идея, что $\chi_G(t)$ - это какой-то многочлен от переменной t. Далее приводится способ, позволяющий одновременно и доказать этот факт, и вычислить сам многочлен.

г) Пусть в графе G вершины a, b не соединены ребром. Покажите. что число способов правильно раскрасить вершины графа G в t цветов равно количеству способов правильно раскрасить вершины этого графа в t цветов так, что вершины a, b разного цвета, плюс количество способов правильно покрасить вершины графа в t цветов так, чтобы вершины A, B были одного цвета.

д) Пусть в графе G есть некоторое ребро e. Обозначим за $G - e$ граф, полученный из G выкидыванием ребра e, а за G/e - граф, полученный из G стягиванием ребра e, т.е. выкидыванием ребра e и склеиванием его концов. Например, если в цикле стянуть одно ребро, то получится цикл, длины на 1 меньшей.

Докажите, что $\chi_{G-e}(t) = \chi_G(t) + \chi_{G/e}(t)$.

е) Докажите, что $\chi_G(t)$ есть многочлен от t (разумеется, для разных графов он, обычно, разный.)

$\boxed{\textbf{CS 54.}}$ Пусть в графе G содержится n вершин, m ребер и k компонент связности $G_1, G_2 \dots G_k$, тогда а) Старший коэффициент $\chi_G(t)$ равен 1.

б) Коэффициент при t^{n-1} равен $-m$.

в) Коэффицинты при $t^0, t^1, \dots, t^{k-1}$ все нули.

г) Коэффициент при t^k отличен от нуля.

д) $\chi_G(t) = \chi_{G_1}(t)\chi_{G_2}(t)\dots\chi_{G_k}(t)$.

е) Докажите, что знаки коэффициентов хроматического многочлена чередуются.

ж) Докажите, что граф с n вершинами является деревом тогда и только тогда, когда его хроматический многочлен равен $t(t-1)^{n-1}$.

$\boxed{\textbf{CS22.}}$ В сильно связном ориентированном графе (сильно связный граф, значит из любой вершины можно добраться до любой другой) между любыми двумя вершинами существует максимум одно ребро, кроме того из любой вершины **выходит** по крайне мере два ребра. Докажите, что в таком графе можно удалить вершину без потери сильной связности.

$\boxed{\textbf{CS40.}}$ В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными вчера новостями со всеми своими знакомыми Известно, что любая новость становится известной всем жителям поселка. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно всем им сообщить новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям поселка.

$\boxed{\textbf{CS44.}}$ В связном графе 100 вершин и для любых $k \le 50$ вершин найдется не меньше, чем $2k$ вершин, соединенных с одной их этих k. Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.

$\boxed{\textbf{CS45.}}$ Докажите, что из любого двусвязного графа, степени всех вершин которого больше двух, можно удалить вершину так, чтобы граф остался двусвязным.

$\boxed{\textbf{CS47}}$ в) Докажите, что $\frac{1}{e\alpha(1-\alpha)n^2}2^{H(\alpha)n} < C_n^{\alpha n} < \frac{n}{e}2^{H(\alpha)n}$, где $H(\alpha) = -\alpha\log\alpha - (1-\alpha)\log(1-\alpha)$, $0 < \alpha < 1$.