Задание 8 (на 05.11)

CS 57. а) Сколько существует ломанных, идущих из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$ шагами $(1,1)$ и $(1,-1)$? б) Покажите, что число ломанных, из $(0,0)$ в $(2n,0)$, пересекающих прямую $y=-1$, равняется числу ломанных из $(0,0)$ в $(2n,-2)$. в) Найдите число ломанных из $(0,0)$ в $(2n,0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость.

CS 58. а) Найдите количество последовательностей $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$, для которых $a_i = \pm 1$, $a_1 \geq 0, a_1+a_2 \geq 0, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{2n-1} \geq 0, a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = 0$. б) Кассир, у которого изначально нет денег продает билеты по 50 рублей. Очередь состоит из $2n$ человек, у половины из которых есть купюра в 100 рублей, а у половины 50 рублей. Сколько существует очередей, при которых кассир сможет дать всем сдачи? в) Посчитайте число способов разбить n-угольник на треугольники, не пересекающимися диагоналями. г) Посчитайте количество способов соединения $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами.

CS 59. Разбиение числа n называется самосопряженным, если его диаграма Юнга симметрична относительно диагонали. Докажите, что число самосопряженных разбиений равняется числу разбиений числа n на различные нечетные слагаемые.

CS 60. Докажите, что среди любых а) 6 человек есть либо 3 попарно знакомых, любо 3 попарно незнакомых; б) 10; в) 9 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых. г) Докажите, что из любых 18 человек есть либо 4 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

CS 61. В полном n-вершинном графе красят ребра так, что любые два ребра с общей вершиной окрашивались различными цветами. Какое наименьшее число цветов нужно для такой раскраски?

CS 62. Ребра связного графа покрашены в три цвета так, что из каждой вершины выходит ровно по одному ребру каждого цвета. Докажите, что можно обойти все вершины графа, не проходя ни по какому ребру в разных направлениях.

CS 63. Докажите, что если G — произвольный не пустой регулярный граф (степени всех вершин равны) с нечетным числом вершин, то $\chi'(G) = \Delta + 1$, где Δ - максимальныя степень в графе.

CS 64. Докажите, что если в графе любые два нечетные цикла имеют общую вершину, то $\chi(G) \leq 5$.

CS22. В сильно связном ориентированном графе (сильно связный граф, значит из любой вершины можно добраться до любой другой) между любыми двумя вершинами существует максимум одно ребро, кроме того из любой вершины **выходит** по крайне мере два ребра. Докажите, что в таком графе можно удалить вершину без потери сильной связности.

CS44. В связном графе 100 вершин и для любых $k \leq 50$ вершин найдется не меньше, чем $2k$ вершин, соединенных с одной их этих k. Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.

CS45. Докажите, что из любого двусвязного графа, степени всех вершин которого больше двух, можно удалить вершину так, чтобы граф остался двусвязным.