

### Задание 9 (на 11.11)

**CS 65.** Найдите производящие функции для последовательностей: а)  $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ ; б)  $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots$  в)  $1^2, 2^2, 3^3, 4^2, \dots$

**CS 66.** Пусть  $A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$ . Найдите производящие функции последовательностей а)  $a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots$ ; б)  $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots$ ; в)  $a_0, a_1b, a_2b^2, a_3b^3, \dots$ ; г)  $a_0, a_2, a_4, a_6, \dots$

**CS 67.** а) Пусть  $a_n$  — это число способов выбрать из  $n$  элементов набор из  $r$  элементов, причем разрешено брать 1 элемент несколько раз, а порядок не важен. Найдите производящую функцию для этой последовательности. И найдите формулу для  $a_n$ . б) А если каждый элемент разрешается включать в набор лишь четное число раз?

**CS 68.** Производящая функция последовательности  $a_n$  имеет вид  $\frac{1-s^4}{1-s^3}$ . Найдите рекуррентное соотношение наименьшего порядка (с некоторого места).

**CS 69.** Пусть  $a_n$  — это количество ломанных, идущих из точки  $(0, 0)$  в точку  $(n, 0)$  шагами  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$  и  $(1, 0)$ , не опускающихся в нижнюю полуплоскость. Найдите производящую функцию этой последовательности (в замкнутом виде).

**CS 70.** Докажите, что модуль значения хроматического многочлена в точке  $-1$  равен числу ациклических ориентаций графа.

**CS 71.** а) Сколько диагоналей в триангуляции  $n$ -угольника? б) Докажите, что у всех графов, которые получаются как триангуляция выпуклого  $n$ -угольника, одинаковые хроматические многочлены.

**CS 72.** Таблицей инверсий перестановки  $\sigma \in S_n$  называется кортеж чисел  $\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n)$ , где  $\tau(i)$  — это количество чисел  $j < i$ , что  $\sigma(j) > \sigma(i)$ . а) Покажите, что любой кортеж  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , в котором  $0 \leq t_i \leq i - 1$  является таблицей инверсии какой-то перестановки. б) Покажите, что каждое число от 0 до  $n! - 1$  единственным образом представляется в виде  $a_00! + a_11! + a_22! + \dots + a_{n-1}(n-1)!$ , где  $0 \leq a_i \leq i$ .

---

**CS22.** В сильно связном ориентированном графе (сильно связный граф, значит из любой вершины можно добраться до любой другой) между любыми двумя вершинами существует максимум одно ребро, кроме того из любой вершины **выходит** по крайней мере два ребра. Докажите, что в таком графе можно удалить вершину без потери сильной связности.

**CS44.** В связном графе 100 вершин и для любых  $k \leq 50$  вершин найдется не меньше, чем  $2k$  вершин, соединенных с одной из этих  $k$ . Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.

**CS45.** Докажите, что из любого двусвязного графа, степени всех вершин которого больше двух, можно удалить вершину так, чтобы граф остался двусвязным.

**CS64.** Докажите, что если в графе любые два нечетных цикла имеют общую вершину, то  $\chi(G) \leq 5$ .