

Задание 10. (На 27.11.09)

Интерпретации одной сигнатуры называются элементарно эквивалентными, если любая замкнутая формула, которая истинна в одной интерпретации, истинна и в другой.

ML 59. $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ — это две копии множества целых чисел, причем все числа из второй копии считаются больше, чем все числа из первой копии. Докажите, что $(\mathbb{Z}, =, <)$ элементарно эквивалентна $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, =, <)$.

ML 60. Будет ли интерпретация $(\mathbb{N}, =, <)$ элементарно эквивалентна а) $(\mathbb{N} + \mathbb{N}, =, <)$ б) $(\mathbb{N} + \mathbb{Z}, =, <)$?

ML 61. Будут ли интерпретации $(\mathbb{Z}, =, <)$ и $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, =, <)$ изоморфны? А элементарно эквивалентны? Порядок на $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ такой: сначала сравниваются вторые элементы пары, в случае их равенства сравниваются первые элементы.

ML 62. а) Докажите, что в интерпретации $(\mathbb{Q}, =, <, +, \text{рациональные константы})$ допустима элиминация кванторов. б) Пусть единичный квадрат разрезан на несколько меньших квадратов. Тогда все они имеют рациональные стороны.

Теорией называется множество замкнутых формул. Пусть I — интерпретация, $Th(I)$ — это множество замкнутых формул, которые истинны в этой интерпретации. Теория называется конечно-аксиоматизируемой, если существует конечное множество истинных формул этой теории (аксиомы), что все остальные формулы этой теории выводятся из этих аксиом.

ML 63. Будет ли теория $(Th(\mathbb{Z}, =, <))$ конечно аксиоматизируемой?

ML 64. Будет ли теория $(Th(\mathbb{N}, =, <))$ конечно аксиоматизируемой?

ML 20. Докажите, что k -ленточную машину Тьюринга, которая работает время $f(n)$ можно смоделировать 2-ленточной за время $f(n)\log f(n)$.

ML 46. Покажите, что существует такой оракул A и язык $L \in NP^A$, что L не сводится по Тьюрингу к $3SAT$, даже если сведение может использовать оракул A .

ML 48. а) Докажите, что для любого k в PH найдется язык с схемной сложностью $\Omega(n^k)$. б) Замените PH на Σ_2^P .

ML 49. Докажите, что если $P = NP$, то существует язык из EXP , схемная сложность которого не меньше $2^n/n$.