

### Задание 5

**Определение.**  $\Sigma_0 = \Pi_0$  — множество разрешимых предикатов на множестве натуральных чисел.  $\Sigma_{k+1}$  — это множество предикатов, которые представляются в виде  $\exists y P(x, y)$ , где  $P \in \Pi_k$ , а предикаты из  $\Pi_{k+1}$  представляются в виде  $\forall y P(x, y)$ , где  $P \in \Sigma_k$ . Последовательность  $\Sigma_k$  (и  $\Pi_k$ ) называется арифметической иерархией.

- ML 29.** а) Покажите, что  $\Sigma_1$  — это множество перечислимых предикатов, а  $\Pi_1$  — коперечислимых.  
 б) Покажите, что  $Q \in \Sigma_k$  тогда и только тогда, когда  $Q$  можно представить в виде:  $Q(x) = \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \dots P(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ , где  $P$  — разрешимый предикат. (соответственно  $Q \in \Pi_k \iff Q(x) = \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \dots P(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ).  
 в) Покажите, что  $\Sigma_k \cup \Pi_k \subseteq \Sigma_{k+1} \cap \Pi_{k+1}$ .  
 г) Покажите, что каждый арифметичный предикат содержится в  $\Sigma_k$  для некоторого  $k$ .  
 д) Покажите, что все предикаты из  $\Sigma_k$  являются арифметичными.

**Определение.** Множество  $A$   $m$ -сводится к множеству  $B$ , если существует такая вычислимая всюду определенная функция  $f$ , что  $x \in A \iff f(x) \in B$ . Обозначение:  $A \leq_m B$ .

- ML 30.** а)  $A \leq_m B$ ,  $B$  — разрешимо, докажите, что  $A$  — разрешимо.  
 б)  $A \leq_m B$ ,  $B$  — перечисливо, докажите, что  $A$  — перечисливо.  
 в) Докажите, что  $A \leq_m B \iff \mathbb{N} \setminus A \leq_m \mathbb{N} \setminus B$ .  
 г)  $A \leq_m B$ ,  $B \in \Sigma_k$  докажите, что  $A \in \Sigma_k$ .

- ML 31.** а) Докажите, что существует универсальное перечислимое множество. Т.е. такое перечислимое множество пар  $U$ , что для любого перечислимого множества  $A$  найдется элемент  $a$ , что  $A = \{x \mid (a, x) \in U\}$ .  
 б) Докажите, что для всех  $k \geq 1$  существует универсальное множество в  $\Sigma_k$  и  $\Pi_k$ .  
 в) Докажите, что универсальное множество для  $\Sigma_k$  не содержится в  $\Pi_k$ .  
 г) Докажите, что  $\Sigma_k \subsetneq \Sigma_{k+1}$ .

- ML 32.** Пусть  $T$  — это множество номеров замкнутых формул в сигнатуре  $\{+, \times, =\}$ , которые истинны в естественной интерпретации на множестве натуральных чисел.  
 а) Докажите, что для любого  $P \in \Sigma_k$  выполняется  $P \leq_m T$ .  
 б) (Теорема Тарского) Докажите, что  $T$  не является арифметичным.  
 в) (Теорема Геделя о неполноте) Покажите, что  $T$  не является перечислимым.

**ML 33.** Существует ли универсальное разрешимое множество?

**ML 20.** Докажите, что  $k$ -ленточную машину Тьюринга, которая работает время  $f(n)$  можно смоделировать 2-ленточной за время  $f(n) \log f(n)$ .

**ML 21.** Докажите, что нет алгоритма, который бы проверил, верно ли, что данная машина Тьюринга работает время  $100n^2 + 200$ .