Задание 10 (на 20.11)

SE 72. Докажите, что число плоских бинарных деревьев с одним корнем (корень — это вершина степени 1) и n листьями равняется числу Каталана c_{n-1}.

SE 73. Берутся всевозможные непустые подмножества нечетной мощности из множества чисел $1, 2, 3, \dots, N$. Для каждого такого подмножества нечетной мощности берчтся величина, обратная к произведению всех его чисел. Найти сумму всех таких обратных величин.

SE 74. Докажите, что число разбиений числа n, в которых могут повторяться только нечетные части, равно числу разбиений n в которых нет части, встречающейся более чем три раза.

SE 75. Фаном называется граф, состоящий из вершин $\{0, 1, 2\ , \dots, n\}$, вершина 0 соединена ребром со всеми остальными вершинами, кроме того вершина i соединена ребром с вершиной $i+1$ для всех $1 \leq i \leq n-1$. Пусть f_n — это количество остовных деревьев фана. а) Докажите, что $f_n = 2f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + \dots + f_1 + 1$; б) Найдите производящую функцию последовательности f_n; в) Найдите f_n.

SE 76. Найдите количество способов разбить доску $3 \times n$ на доминошки. Указание: найти рекуррентное соотношение и производящую функцию.

SE 77. Решите рекуррентное соотношение: $g_0 = 1, g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + 3g_{n-3} + \dots + ng_0$.

Определение. Экспоненциальной производящей функцией для последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$ называется ряд $\frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!}s + \frac{a_2}{2!}s^2 + \dots$

SE 78. Найдите экспоненциальную производящую функцию для последовательностей: а) $1, 1, 1, 1, \dots$; б) $1, -1, 1, -1, 1, -1$; в) $A(s)$ — экпоненциальная производящая функция для последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$, какая будет экспоненциальная производящая функция для последовательности $a_1, a_2, a_3, \dots$? Вычислите экспоненциальную производящую функцию для последовательностей: г) $a_n = q^n$; д) $a_n = n$; е) $a_n = n(n-1)$; ж) $a_n = n^2$

SE 79. Вычислите экспоненциальную производящую функцию для чисел Фибоначчи.

---

71. Таблицей инверсий перестановки $\sigma \in S_n$ называется кортеж чисел $\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n)$, где $\tau(i)$ — это количество чисел $j < i$, что $\sigma(j) > \sigma(i)$. а) Покажите, что любой кортеж $(t_1, t_2, \dots, t_n)$, в котором $0 \leq t_i \leq i-1$ является таблицей инверсии какой-то перестановки. б) Покажите, что каждое число от 0 до $n! - 1$ единственным образом представляется в виде $a_0 0! + a_1 1! + a_2 2! + \dots + a_{n-1}(n-1)!$, где $0 \leq a_i \leq i$.