

Задание 11 (на 27.11)

SE 80. Докажите, что степенные ряды $a_1s + a_2s^2 + \dots$, $a_1 \neq 0$ образуют группу относительно операции композиции.

SE 81. Найдите производящую функцию числа разбиений на k слагаемых.

SE 82. Докажите, что $(1 + s + s^2 + \dots + s^9)(1 + s^{10} + \dots + s^{90})(1 + s^{100} + \dots + s^{900}) \dots = \frac{1}{1-s}$.

SE 83. Докажите, что натуральное число n может быть представлено в виде суммы меньших натуральных слагаемых $2^{n-1} - 1$ способом, если два представления, отличающиеся порядком слагаемых считать различными.

SE 84. Помеченное дерево - это дерево, вершины которого пронумерованы. Каждому помеченному дереву можно сопоставить код Прюфера: выбираем лист с наименьшим номером, записываем номер вершины, к которой этот лист прикреплен, удаляем лист и т.д. пока не останется одна вершина (с каким номером?). а) Докажите, что по коду Прюфера помеченное дерево однозначно восстанавливается. б) Сколько существует помеченных деревьев из n вершин?

SE 85. Для последовательностей с двумя параметрами рассматривают производящие функции от двух переменных. Найдите замкнутый вид производящей функции для последовательности C_n^k : $\sum_{n,k} C_n^k x^n y^k$.

SE76 Найдите количество способов разбить доску $3 \times n$ на доминошки. Указание: найти рекуррентное соотношение и производящую функцию.

SE77 Решите рекуррентное соотношение: $g_0 = 1, g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + 3g_{n-3} + \dots + ng_0$.

Определение. Экспоненциальной производящей функцией для последовательности a_0, a_1, a_2, \dots называется ряд $\frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!}s + \frac{a_2}{2!}s^2 + \dots$

SE78 Найдите экспоненциальную производящую функцию для последовательностей: а) $1, 1, 1, 1, \dots$; б) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$; в) $A(s)$ — экспоненциальная производящая функция для последовательности a_0, a_1, a_2, \dots , какая будет экспоненциальная производящая функция для последовательности a_1, a_2, a_3, \dots ? Вычислите экспоненциальную производящую функцию для последовательностей: г) $a_n = q^n$; д) $a_n = n$; е) $a_n = n(n-1)$; ж) $a_n = n^2$

SE79 Вычислите экспоненциальную производящую функцию для чисел Фибоначчи.