

Задание 12 (на 04.12)

SE 86. По каналу связи требуется передать информацию, состоящую из 10 битов. Известно, что максимум один из передаваемых битов исказится. Докажите, что невозможно придумать надежную схему, которая требовала бы передачи всего 13 битов. А как обойтись 14 битами?

SE 87. Пусть $n \geq 2$, $H(V, E)$ — n -однородный (Ребра — это n -вершинные подмножества V) гиперграф с числом ребер, равным $|E| = 4^{n-1}$. Покажите, что существует такая раскраска множества вершин V в 4 цвета, что ни одно ребро не является монохроматическим.

SE 88. Пусть $n \geq 4$, $H(V, E)$ — n -однородный (Ребра — это n -вершинные подмножества V) гиперграф с числом ребер, равным $|E| < \frac{4^{n-1}}{3^n}$. Покажите, что существует такая раскраска множества вершин V в 4 цвета, что в каждом ребре присутствуют все 4 цвета.

SE 89. Докажите, что если $C_n^k(1 - 2^{-k})^{n-k} < 1$, то существует турнир из n команд, в котором для любых k команд существует команда, которая выиграла у всех этих k .

SE 90. В графе n вершин и m ребер. Докажите, что из этого графа можно удалить не более, чем $\frac{m}{k}$ ребер так, чтобы вершины получившегося графа можно было бы правильным образом покрасить в k цветов.

SE 91. $F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. а) Докажите, что $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$. б) Докажите, что сумма восьми последовательных чисел Фибоначчи не является числом Фибоначчи. в) Докажите тождество $C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + \dots = F_n$. г) Докажите тождество $F_{m+n} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$.

SE84. Помеченное дерево — это дерево, вершины которого пронумерованы. Каждому помеченному дереву можно сопоставить код Прюфера: выбираем лист с наименьшим номером, записываем номер вершины, к которой этот лист прикреплен, удаляем лист и т.д. пока не останется одна вершина (с каким номером?). а) Докажите, что по коду Прюфера помеченное дерево однозначно восстанавливается. б) Сколько существует помеченных деревьев из n вершин?

SE85. Для последовательностей с двумя параметрами рассматривают производящие функции от двух переменных. Найдите замкнутый вид производящей функции для последовательности $C_n^k: \sum_{n,k} C_n^k x^n y^k$.