

### Задание 13 (на 11.12)

**SE 92.** На множестве  $\{0, 1\}^n$  введены операции  $+$  (покоординатно) и  $*$  так, чтобы получилась структура поля. Для  $x \in \{0, 1\}^n$  обозначим за  $(x)_{\leq m}$  вектор, получающийся из первых  $m$  координат  $x$  ( $1 \leq m \leq n$ ). Докажите, что для каждого  $c \in \{0, 1\}^n$ ,  $c \neq 0$  отображение  $x \mapsto (c * x)_{\leq m}$  принимает каждое значение из  $\{0, 1\}^m$  по  $2^{n-m}$  раз.

**SE 93.** Беспорядком называется перестановка, которая не имеет неподвижных точек ( $\forall i \sigma(i) \neq i$ ). Пусть  $\pi_n$  — это число беспорядков на  $n$  элементах. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi_n}{n!}$ .

**SE 94.** В матрице  $2n \times 2n$  стоят нули на главной диагонали, а во всех остальных строчках стоят  $\pm 1$ . Докажите, что определитель этой матрицы отличен от нуля.

**SE 95.** Докажите, что для любых конечных множеств  $I \subseteq J$  выполняется  $\sum_{I \subseteq K \subseteq J} (-1)^{|K \setminus I|} = \begin{cases} 1, & \text{если } I = J \\ 0, & \text{если } I \neq J \end{cases}$

---

**SE91.** г) Докажите тождество  $F_{m+n} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ .

**SE84.** Помеченное дерево — это дерево, вершины которого пронумерованы. Каждому помеченному дереву можно сопоставить код Прюфера: выбираем лист с наименьшим номером, записываем номер вершины, к которой этот лист прикреплен, удаляем лист и т.д. пока не останется одна вершина (с каким номером?). а) Докажите, что по коду Прюфера помеченное дерево однозначно восстанавливается. б) Сколько существует помеченных деревьев из  $n$  вершин?

**SE85.** Для последовательностей с двумя параметрами рассматривают производящие функции от двух переменных. Найдите замкнутый вид производящей функции для последовательности  $C_n^k: \sum_{n,k} C_n^k x^n y^k$ .